This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

93.929
L 2511


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
31
.E8
S7
16

Bibliothek
Ernst Steiner
Abteilung Bücher
Nr. 72
Eingereiht im Oktober 1917

[illegible]

# EVCLIDES RESTITVTVS

Denuò limatus,

ſiue

## PRISCÆ GEOMETRIÆ ELEMENTA

Breuiùs, & faciliùs contexta,

*In quibus præcipuè*

PROPORTIONVM THEORIÆ

noua firmiorique Methodo

proponuntur.

*Editio tertia, cui ſubſequuntur Apollonij Elementa conica, atque Archimedis opera breuiori methodo demonſtrata.*

A IO. ALPHONSO BORELLIO.

Collegij Regij ...onensis Scholarum Piarum

ROMÆ,

Ex Typographia Maſcardi, 1679.

*Superiorum permiſſu.*

Imprimatur ſi videbitur Reuerendiſs.
P. Mag. Sac. Pal. Apoſt.

*I. de Angelis Archiep. Vrbinat. Viceſg.*

*Imprimatur,*

Fr. Raymundus Capiſuccus Ord. Præd.
Sac. Pal. Apoſt. Magiſt.

# ILLVSTRISSIMIS DOMINIS
# PARMENSIS
# COLLEGII
# CONVICTORIBVS

*ALEXANDER FALCONERIVS*
*FELICITATEM.*

6-26-29 N.G.S.

CORONANDOS *eſſe Fontes ab eo qui aquas indè hauſerit, Veteris oraculi vox eſt: quæ quidem quantum vobis, nobiliſsimi ſodales, quantum clariſsimo Viro Domino Alphonſo Borellio Præceptori meo debeam, apertè ſatis admoneor. Veſtro contubernio ſumma cum animi mei voluptate atque vtilitate plures annos vſus, à vobis omnis elegantiæ ac ſapientiæ exempla habui. A veſtro deinde Collegio digreſſus, cum in Mathematicis diſciplinis Magiſtrum habui, qui breuitate ac claritate docendi iucundam æquè*

*mihi atque vtilem redderet operam ſuam Sapientum omnium approbatione laudatiſsimam. En igitur cum vobis cum illi ad gratam aliquam memoris animi ſignificationem exhibendam obſtringi me ſentiam, duos (vt vetus habet verbum) vna fidelia parietes dealbo, duo ſimul colia pariter dealbo, duo ſimul conor debita expungere. Eruditiſſimi Viri Opus in Euclidis Elementa iterata iam emiſsione iudicijs publicis probatum, noua curanda editione illuſtrare ſtudui: Hanc ipſam vobis pro meo erga Vos ſtudio, tanquam pignus demiſsæ ac perpetuò obſequioſiſſimæ Voluntatis dicare, ac conſecrare conſtitui. Ea eſt Indolis veſtræ Generoſitas, vt munus hoc, etſi foret infra dignitatem veſtram, benignè tamen admiſſuros vos ac gratiam, quæ illi deeſset, ex indita vobis humanitate ſuppleturos confidere potuerim. Eſt igitur, cur id facilius mihi perſuadeam cum ſingularis præſtantię librum eſſe ſciam à*

lau-

*laudatiſsimo ſcriptore elucubratum, cumque de eo tractet argumento, quod ingenijs veſtris apprimè arridere debeat; Communis enim vobis eſt cum reliqua Europæ Nobilitate Amor ac ſtudium in nobiliſſimam hanc Philoſophiæ partem, quæ hac noſtra ætate in ipſis Regum, ac Principum Virorum Aulis, atque in priuatis Eruditorum penetralibus excipi benignius conſueuit. Accipite ergo illum tamquam publicam teſſeram æterni mei Amoris atque obſequij Erga iſtud toto iam Orbe celleberimum Collegium, & me, ac bonas artes, vt ſoletis, amate. Valete.*

EV-

# EVCLIDES RESTITVTVS

## A IO. ALPHON. BORELLIO

NEAPOLITANO

Editio tertia denuo limata.

### AD LECTOREM GEOMETRAM.

SICVT antiquitus licuit, & iuuit prima Geometriæ Elementa à priſcis Ægyptijs tradita a Thalete, Hippia, Pythagora, & pluribus alijs ante, & poſt Euclidem ſemper nouis inuentis corrigere, locupletare, limare, & noua forma & ordine, atque methodo demonſtratiua immutare. Sic quoque mihi licebit, ſeruata antiquitatis reuerentia, iterum Elementa Geometriæ in nouam formam clariorem, aliquibus etiam in locis firmiori modo contextam reſtituere.

Et primo breuiter innuam rationes, quæ ſuaſerunt vacillantes aliquas partes Geometriæ reformare.

Vacillat quippe Geometria in Doctrina parallelarum, & Proportionum: quia nimirum procedunt ex Principijs non omnino certis, & euidentibus. Et hoc in prima huius reſtitutionis editione ſatis prolixe oſtenſum eſt in ſcholijs, cuius Doctrinæ hic afferam breuem, & claram notitiam, & inſuper aliqua de nouo ſuperaddam.

Cum

Cum ſcientia ſit certa, & euidens cognitio rerum; & ſcientia ſit progreſſus Intellectualis ex notis ad ignota; procul dubio principia ex quibus ignotæ concluſiones deduci debent, oportet, vt ſint notiora illis: at nemo notiſſimum reputabit illud quod non percipitur, an verum ſit & andari in rerum natura queat. Modo Parallelarum Doctrinam ab Euclide traditam imperfectam eſſe cenſuerunt, Poſſidonius, Geminus, & alij ob defectum Principiorum ſcilicet ob imperfectionem definitionis Parallelarum, & Petitionis quintæ. Dixit enim Euclides *duas rectas lineas in eodem plano exiſtentes, quæ non concurrunt ad vtraſque partes, licet in infinitum producantur, eſſe Parallelas.* Talis namque paſſio ignota eſt; tum quia ignoramus, an tales lineæ infinitæ non concurrentes reperiri poſſint in natura; tum etiam quia infiniti proprietates percipere non poſſumus, & proinde non eſt euidenter cognita.

Non minus ignota eſt Definitio Parallelarum a Poſſidonio excogitata, dixit enim *parallelas eſſe duas illas rectas, quæ æquali internallo ſemper inter ſe diſtant.* Ignoratur enim quid nomine *internalli* intelligi debeat, & an verificari poſſit talis conditio, ſcilicet, an dari poſſint huiuſmodi rectæ lineæ, quæ ſemper æquali interuallo a ſe inuicem diſtent in illa extenſione infinita.

Pariter Ptolomæus Proclus & alij Petitionem quintam Euclidis è numero Principiorum reicierunt, quæ talis eſt. *Si in duas rectas lineas in eodem plano exiſtentes, tertia incidens duos angulos internos ad easdem partes conſtitutos minores duobus angulis rectis fecerit, lineæ illæ concurrent ad partes, vbi anguli duobus rectis minores ſunt.* Talis quippe Petitio cognita non eſt lumine naturæ, & ideo erit Principium ignotum. Adde quod Annuere duas rectas coincidentiæ certum ſignum non eſt; cum dari queant lineæ, que annuunt, & nunquam coincidunt, vt Concoides, &

Aſimptoti. Erit igitur talis petitio Theorema, non Principium; quod non rite a Ptolemæo, & Proclo demonſtratum fuit: Ideo Arabes, & poſtea Clauius firmiori progreſſu id ipſum demonſtrare conati ſunt ex antiqua parallelarum definitione: quæ cum ſit ignota, vt dictum eſt; ideo in hac reſtitutione Primo ponitur definitio Parallelarum, quæ eſt euidentiſſima. Certum enim eſt, ex Propoſitionibus 10. & 11. Primi Elementi in *tab. 8. fig. 7.* quod *duæ rectæ AB, CD in eodem plano exiſtentes poſſunt perpendiculariter eleuari ſuper eandem rectam EH; tunc quidem prædictas lineas AB, & CD voco inter ſe parallelas.* De quibus paſſio æquidiſtantiæ deinceps demõſtratur, & talis definitio procul dubio erit principium ſcientiæ; cum exponatur per paſſionem poſſibilem & euidentiſſimam.

Pronunciatum poſtea quod præmitti debet id ipſum eſt quod Arabes, & Clauius aſſumpſerunt, nempe *tab. 8. fig. 8. Si recta AB perpendiculariter innixa ſuper rectam BC in puncto eius extremo B transferatur transuerſali motu in eodem plano vſque ad DC, & in motu eius non vacillet, ſed ſemper perpendicularis ſit ſuper BC; tunc puncti A fluxus AEB erit linea Recta*; quod patet ex eo quod omnia puncta in AED deſignabilia æqualibus interuallis (menſuratis nempe ab eadem perpendiculari AB) diſtant ab omnibus punctis rectæ BC; & ideo eius puncta ſe conſequuntur, & diſpoſita ſunt eodem ordine directo quem exigit fluxus breuiſſimus rectæ BC.

Secundus error qui in vulgatis Elementis irrepſit, & procul dubio ab aliquo alio textui Euclidis additus fuit, eſt, *diuerticulum Contingentiæ* a peripheria Circuli, & a recta linea eum contingente compræhenſum; quod angulum conſtituere Proclus cenſuit. At hoc falſum eſſe putant Magni Viri Vieta, Galileus, & omnes Neoterici Mathematici inſignes, quorum rationes hic non referam, cum ſufficiat hæc Vnica in prima editione

huius reſtitutionis tradita. Conſtat ex anguli Definitione: *Inclinationem duarum linearum ſe tangentium in vno puncto eſſentiam anguli conſtituere*. Igitur ſi duæ lineæ, quæ in vno puncto conuenientes vnicam certam, & determinatam inclinationem non efficiunt. procul dubio angulum non conſtituent. Atqui talem eſſe diuerticulum contingentiæ ſic oſtendetur. *Tabu. 8. fig. 9.*

Sit polygonum *abes* quod tangat recta *ea* in latere *an*, patet quod perimeter *abe* cum tangente *ea* non vnicam ſed tot inclinationes conſtituit quot ſunt eius latera, ſcilicet *bae*, *cbe*, *dge* &c. harum autem inclinationum nulla angulum conſtituit excepta poſtrema *bae*; quia quælibet alia vt lateris *eb* & *ex* caret concurſu linearum in vno puncto, ſine quo angulus eſſe nequit. Conſideretur modo *tab. 8. fig. 10.* Circulus ABC quem contingat recta horizontalis EA. quia circulus cenſetur eſſe polygonum compræhenſum ab infinitis lateribus, tot nimirum quot ſunt puncta circumferentiæ eius, & hæc latera ob circumferentiæ curuaturam, diuerſimodè inclinata ſunt ad tangentem EA; ſcilicet puncti C inclinatio determinatur ab eius fluxu CG in directum continuato, qui fluxus per circuli tangentem dirigitur, quod ex ſcientia mechanica perſpicuè ſuadetur. Quiapiã grauis B Innixa ſuper curuam A C in C perinde fulcitur a peripheria vel à ſemidiametro, D C, ac ſi inniteretur ſuper planum inclinatum tangentis GC: & proinde inclinatio puncti C peripheriæ ſuper planum E A erit eadem quam habet angulus rectilineus EGC. Similiter incliuatio puncti peripheriæ B erit ea quam habet angulus rectilineus EHB, qui minor eſt angulo EGC: & ſic vlterius omnia alia puncta deſignata in peripheria BA efficiunt diuerſas inclinationes cum tangente EA: ſemper inter ſe inæquales, & decreſcentes; & quia in curua CBA deſignari poſſunt infinita puncta; ergo peripheria CBA

5 cum

cum tangente BA efficit infinitas rectilineas inclinationes inæquales inter ſe, & continenter acutiores, quouſque in puncto contactus A prorſus inclinatio deſtruatur, & annihiletur. Iam ex hiſce infinitis inclinationibus nulla aſſignari poterit, quæ ſit propria, & conſtitutiua anguli diuerticuli contingentiæ, duplici ratione: primo quia deficit concurſus in vno puncto, ſecundo quia quælibet earum efficit angulum rectilineum cum tangente BA; (& Proclus non veretur affirmare, quod angulus contingentiæ ſit minor quolibet angulo acuto rectilineo) talis ergo inclinatio ſemper minor eſt quacunque data inclinatione procedendo verſus contactum A: nec aſſignari poteſt poſtrema, preter quam in ipſomet puncto contactus vbi nulla inclinatio datur, quandoquidem punctum A congruit cum tangente BA. Patet ergo propoſitum.

Tertius locus, qui in Elementis Geometriæ reſtitui debet, eſt ille qui agit de *Proportione & proportionalitate* cum toto libro Quinto Euclidis: Hunc plane omnes fatentur obſcuriſſimum eſſe; & ideo hanc geometriæ partem pleriqne reſtituere conati ſunt, ſed irrito conatu vt mox patebit.

Nemo ambigit quod talis obſcuritas non aliunde pendeat quam ex defectu principiorum aſſumptorum, nempe ex Definitionibus, quæ cum ſint Principia, & cauſæ ſcientiæ debent eſſe notiſſimæ, vt euidentiſſimam cognitionem producere poſſint. Quod vero Definitiones ab Euclide traditæ in Quinto Elementorum ſint obſcuriſſimæ, omnes vno ore fatentur. Triplici enim modo *proportionem* & *proportionalitatem* definiuit Euclides, ſemel libro VII. vbi duorum numerorum proportionem definiuit; *reſpectum, quia antecedens eſt multiplex, vel pars aut partes conſequentis numeri*: & duos numeros ad duos alios eandem proportionem habere dixit, *quando antecedentes æque multiplices, vel eadem pars, aut eadem*

*par-*

*partes conſequentium fuerint*. Et tales profecto definitiones ſunt certæ, & euidentiſſimè cognitæ, & proinde merito inter principia ſcientiæ connumerari poſſunt. At quia preter numeros, & preter quantitates inter ſe commenſurabiles, quæ ſe habent vt numerus ad numerum, dantur etiam quantitates inter ſe prorſus *Incommenſurabiles*, quæ Aſſimetræ vocantur, in quibus adaptari non poſſunt illæ definitiones numerorum proportionalium; propterea coactus fuit Euclides tradere definitiones proportionis, & Proportionalitatis vniuerſaliores, quæ comprehenderent etiam aſſimetras quantitates. Hoc autem duplici modo preſtitit. Primo dicendo proportionem eſſe, *Reſpectum quemdam duarum magnitudinum quoad quantitatem pertinet*. Et Proportionem eſſe dixit *ſimilitudinem reſpectuum*. Poſtea videmus quod hiſce definitionibus non acquieuit Euclides (ſi tamen ab aliquo additæ non fuerunt) neque ſufficientes eas reputauit, imò neque eis vſus eſt in demonſtrationibus Propoſitionum eius libri V. Sed ſuperaddidit nouam definitionem dicendo. *In eadem proportione eſſe prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ, & tertiæ æque multiplicia a ſecundæ, & quartæ æque multiplicibus (qualiſcumque ſit hæc multiplicatio) vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna excedunt, vel vna æqualia ſunt, ſi ea ſumantur quæ inter ſe reſpondent*.

Hanc porro poſtremam definitionem perplexam, ignotam, & ideo reſpuendam eſſe, nemo inficiatur. Quia definitio ſcientifica debet euidentiſſimè exponere naturam rei definitæ per paſſionem poſſibilem, veram, primam, & notiſſimam, per quam definitum diſtinguatur a quolibet alio ſubiecto. At proprietas expoſita in adducta ſexta deffinitione ignoratur an in rerum natura dari poſſit; infinitæ enim illæ æque multiplices vna maiores, vel vna minores reliquis, non percipimus an dari in natura poſſint, & ideo

igno-

ignoramus an talis paſſio vera ſit: & licet poſſibilis, & vera ſupponatur, obſcura eſt tamen ob infinitatem quam inuoluit: quomodo ergo erit euidentiſſima? Et quam ſcientificam certitudinem parere poterit? Erit igitur talis definitio potius Theorema quod abſque demonſtratione admitti non poteſt; & ideo nouæ definitiones excogitatæ ſunt, quæ ſint euidenter cognita, vt inter principia ſcientiæ iure connumerari poſſint.

Quid vero antiqui cenſuerint, & an, & quomodo hanc præcipuam Geometriæ partem correxerint ob librorum penuriam ignoramus. Scimus tamen Arabes improbaſſe Euclidis methodum, vt refert Campanus; id ipſum tentauit Io: Baptiſta Benedictus, & alij Viri preclari vſque ad noſtra tempora, qui repudiata ſexta definitione Euclidis cenſent recipi debere definitiones tertiam, et quartam, in quibus declarari putant naturam proportionis, & Proportionalitatis per *reſpectum quendam quo ad quantitatem pertinet, & per ſimilitudinem reſpectus*; & reponunt inter axiomata ſeptem V. libri Propoſitiones a VII ad XIII. ex quibus paſſionem æque multiplicium definitionis ſextæ ſe demonſtraſſe ſuadentur; & hinc reliquas propoſitiones libri V. methodo Euclidiana oſtendunt.

In hac controuerſia quid ipſe ſentiam amore veritatis liberè exponam. Quia definitiones eſſe non poſſent principia ſcientiæ, ſcilicet non producerent euidentiſſimam cognitionem niſi intellectui conſtaret earum certitudo, & euidentia; at nemo euidenter percipere dicet illud quod exprimitur verbis obſcuris & ambiguis, ſed oportet vt ſint propria, clarè & expreſsè ſignificantia naturam paſſionis rei definitæ, quæ ad inſtar Iconis in Animo repreſentent Ideam illius, & quare & quomodo, diſtinguatur a qualibet alia. Videamus modo an tertiæ & quartæ definitionum lib. V. Euclidis hæc verba. *Mutua*

*qua-*

*quidam habitudo*, & *ſimilitudo reſpectuum quo ad quantitatem pertinet* habeant prædictas conditiones. Et ſanè particula illa *quidam* eſt vaga & indeterminata, quæ annexa *Reſpectui* declarat quod non ſit vnicus & ſingularis reſpectus, ſed multiplex, quorum ille qui proportionem conſtituere debet non exprimitur, nec indicatur; ſicut qui dicit roſa eſt quidam Flos, ineptè Roſæ definitionem ſe tradidiſſe ſuadetur. Scimus poſtea quod voces ſimilitudinis quorundam reſpectuum ſunt genericæ & ſignificant non omnimodam identitatem, ſed conuenientiam aliquam partialem; & ideo indigent vlteriori declaratione, expreſſe indicando quænam habitudo ex illis pluribus proportionem conſtituat, & in quo conſiſtat talis ſimilitudo. & ſic paſſim ab Euclide, & Appollonio ſimilitudo linearum, & figurarum, tam planarum, quam curuarum, & ſolidarum definitur: non ſolis verbis *Similitudinis quoad quantitatem pertinet*, ſed expreſſe aſſignando partes, modos & circumſtantias, in quibus conſiſtit talis ſimilitudo, exprimendo nempe quod ſimilitudo ſegmentorum circularium conſiſtit in æqualitate angulorum exiſtentium in eiſdem ſegmentis, & quod Polygonorum ſimilitudo conſiſtit in æqualitate omnium angulorum circa quos latera ſunt proportionalia, & ſic in reliquis.

Patet igitur quod non ſufficit dixiſſe Proportionem eſſe duarum Magnitudinum *Mutuum quemdam reſpectum* quoad quantitatem pertinet; & quod proportionalitas eſt *Similitudo eorumdem reſpectuum*. Quia ſi ignoramus quis, & qualis ſit ille reſpectus, qui proportionem conſtituit ſcire non poſſumus quando *vnus quidam reſpectus* quoad quantitatem ſit ſimilis alteri *cuidam*. Hoc plane ab ipſo Euclidis contextu elicitur; ſi enim indicaſſet quod natura Proportionalitatis omnium quantitatum exactè, & ſufficienter expoſita fuiſſet per hæc verba *Similitudo quorumdam reſpectuum quoad quantitatem*

*perti-*

*pertinet.* : Ergo etiam Proportionalitatem numerorum comprehendere debebat, & proinde ſuperfluus fuit exprimendo in quo conſiſteret talis ſimilitudo in numeris, dicendo, *antecedentes eſſe debere æque multiplices, vel eadem pars, aut eadem partes conſequentium* ; Cum ergo hæc definitio numerorum propor-lium ſit optima, & ſcientifica ; potius concedendum eſt illam Vniuerſalem definitionem mancam fuiſſe. Et quis quæſo negabit ſimiles reſpectus quoad quantitatem poſſe plures, & diuerſos eſſe; vt duæ quantitates quæ duabus alijs inæquales ſint inter ſe ſimilem reſpectum quo ad *inequalitatem* habent, ſiue minor ad maiorem, ſiue maior ad minorem conferatur, & ideo 2. ad 3. eumdem reſpectum quoad inæqualitatem habebit quam 5. ad 4. cum ſimiles ſint, quatenus ambo antecedentes inæquales ſunt ſuis conſequentibus. Similiter comparatio 4. ad 2, & 5. ad 3 ſimiles ſunt in *maioritate* cum ambo antecedentes maiores ſint ſuis conſequentibus, vel è contra ambo ſint minores. Non ſecus eumdem reſpectum in æqualitate exceſſus, aut defectus habet 3. ad 2 quam 9. ad 8. quia ſinguli antecedentes eodem exceſſu, vnitatis nempe, ſuperant ſuos conſequentes, & è contra hi ab illis deficiunt. At nulla ex his ſimilitudinibus proportionalitatem conſtituit. Igitur ſuperius tradita definitio eſt ambigua, fallax & apta ad producendam ignorantiam potius, quam certam, & euidentem ſcientiam.

Nec immunes ab hac cenſura ſunt aliqui viri preclari, qui aiunt ſufficere, vt tanta ſit *grandities* primæ magnitudinis reſpectu ſecundæ, quantam habet tertia reſpectu quartæ: nec vt alij aiunt oportere vt prima A eodem modo, ſeu nec magis, nec minus contineat vel contineatur à ſecunda B, quam tertia C continet, vel continetur à quarta D, nedum in commenſurabilibus, ſed etiam in Aſſimetris. Nec illi qui aiunt antecedentes debere eſſe æquè multiplices conſequentium,

&

& præterea illas ſuperare, exceſſibus *Similibus*. Vel dicendo quod prima non ſit prorſus Maior vel minor quam opus eſt vt ad ſecundam habeat reſpectum aut relationem *Similem* illi, quam tertia habet ad quartam. Nec quando aiunt eſſe debere differentiam inter primam & ſecundam *Similem* differentiæ inter tertiam, & quartam: omnia enim hæc bella verba ſunt ſinonima, quæ ne hilum quidem docent præter ignotam illam *quandam* reſpectuum *ſimilitudinem*, quam quid ſibi velit non percipimus, quia ſemper nos relinquunt in eadem ambiguitate, & obſcuritate, cum nunquam declarent, in quo nam conſiſtat illa *quædam Similitudo*, quæ proportionalitatem conſtituit. Seu in quo conſiſtat illa ſimilitudo granditatis, aut ſimilitudo exceſſuum vel defectuum; quæ enim norma, aut trutina dignoſcere poſſumus quo modo aut quando antecedentes non ſunt maiores nec minores quam opus eſt vt ſimiles reſpectus habeant ad ſuos conſequentes? vel ſimiliter contineant aut contineantur ab iiſdem? Itaque velint nolint concedere debent in Aſſimetris proportionalibus proprietatem illam *Similitudinis quorundam reſpectuum* eſſe obſcuram, incomprehenſibilem, & ideo immerito inter ſcientiæ præſtantiſſimæ principia reponi; quæ aliunde eſſe debent magis euidentia & certa, quam ſint propoſitiones quæ inde deduci, & demonſtrari debent.

Hinc agnoſcant quam prudenter Propoſitiones Euclidis 7. 8. vſque ad 13. Axiomata eſſe dicant. Siquidem ignoro quidnam ſit proportionalitas in Aſſimetris & neſcio an detur in Natura, quomodo ſcire poſſum, cui ſubiecto talis proportionalitas competat? Et quomodo diſtinguere poſſum magnitudines Proportionales a non Proportionalibus?

Itaque non video quomo admitti poſſit excuſatio Neoterici Authoris, qui poſtquam declarauit quomodo commenſurabiles magnitudines Proportionales *Similem* reſpectum habent inter ſe, ſubdit, id ipſum in Aſſime-

ſimetris exponi non poſſe, nec debere, quia modus quo antecedens continet conſequentem eſt inexplicabilis. Igitur ſi non poteſt carebimus vera definitione, & ignorata definitione Proportionalitatis incommenſurabilium nil de ipſis demonſtrari poterit, & proinde non dabitur eorum ſcientia. Si non debet declarari ergo profitentur ſe docere poſſe ſcientiam aſſimetrarum pro-tionũ abſq; definitione earundem, ſcilicet abſq; præcognitione exiſtentiæ & quiditatis ſubiecti ſcibilis.

Simili modo aliam doctrinam proportionum laudare non poſſum, quia Primo loco Author eximius rtenta Euclidis tertia definitione Proportionis addit nouam definitionem Proportionalitatis, dicendo, proportiones eſſe inter ſe *ſimiles*, vel *æquales* ſi habuerint *denominatores* æquales. Poſtea in progreſſu demonſtrationum non vtitur hac definitione, ſed ſemper deducit quod A ad B eandem rationem habet quam C, ad D ex memorata definitione quarta Euclidis obſcura, & imperfecta, dicendo quod quantitas prima A ita continet quantitatem ſecundam B, vel ab ea continetur, ſicut quantitas C continet aliam D, vel ab ea continetur. Inſuper permutat proportiones alternè licet ille multoties comparabiles non ſint, nempe diuerſorum generum. Preterea de aſſimetris proportionalibus altum ſilentium.

Ex his omnibus ſatis aperte conſtare videtur imperfectam eſſe methodum Arabum, & ſectatorum eiuſdem doctrinæ.

Reſtat modo expendenda ſpeculatio Doctiſſimi Authoris in ſua Matheſi vniuerſali tradita, qui noua forma declarare nititur librum V Euclidis.

*Primo* reicit definitionem 6. Euclidis vt perplexam & non immediatam. Deinde ait Proportionem *Quoto* extimari debere, & Proportionalitatem probari ſi identitas, vel æqualitas *Quotorum*, ſeu *Valorum*, vel *Reſpectuum* oſtendatur. Supponit poſtea *fractio-*

*ſtiones* numerorum & quantitatum Aſſimetrarum earumque deſignationes oſtendere, *valorem*, ſeu *denominatorem* Proportionis, nempe Quotus eſt antecedens reſpectu ſui conſequentis. Itaque ex eo quod A ad B ſic vt C ad D deducit quod fractio $\frac{A}{B}$ ſcilicet A diuiſum per B equalis eſt fractioni $\frac{C}{D}$ ſeu C diuiſo per D. Et hanc propoſitionem aſſumit loco definitionis, per quam omnia quæ in libro V. Euclidis continentur ſe demonſtraſſe ſuadetur.

At videat quæſo vir preclarus, quod licet Propoſitiones omnes, quas aſſumit ſint veræ in numeris, & in quantitatibus commenſurabilibus, tamen in rigore geometrico vſurpari non poſſunt vt principia euidentiſſima, cum ſint Theoremata, quæ poſſunt, & debent demonſtrari. Poſtea in Aſſimetris non percipitur euidenter quod dentur neque quid ſint fractiones, & eorum Valores; ſeu Quoti ſint antecedentes ipſorum conſequentium, cum nullus reſpectus concipi, aut explicari poſſit in illa infinitate partium, a qua talis reſpectus incommenſurabilis determinatur, nec quomodo diſtinguatur a quolibet alio.

Nec valet effugium quod fractiones incommenſurabilium quantitatum ſint quoque rationales, & numericæ, ſaltem potentia; cum hoc vniuerſaliter verum non ſit: Demonſtrabo enim infinitas proportiones irrationales dari poſſe, quæ non ſunt radices vllarum poteſtatum numericarum cuiuſlibet gradus.

Sit *tab.* 8. *fig.* 11. Progreſſio I, A, $A^2$, $A^3$, $A^4$, $A^5$, continuè pro-liũ cuius vna proportio A ad $A^2$ ſit incommenſurabilis erunt reliquæ omnes proportiones in eadem continua ſerie incommenſurabiles quoque. Intelligatur poſtea A eſſe vnitatem alterius progreſſionis nempe $A^1$, B, $B^2$, $B^3$, $B^4$, in eadem proportione A ad $A^2$, continuatæ. Et quia A ſibi ipſi æqualis eſt: ergo B æqualis eſt $A^2$, & $B^2$, æqualis eſt $A^3$, & ſic vlteri-

trius. Et vt A ad B, ſeu ad $A^2$, ita erit $A^2$, ad $B^2$, erant autem A, & B incommenſurabiles, cum proportionales ſint incommenſurabilibus A, $A^2$, ſeu B. Igitur poteſtates $A^2$, & $B^2$, inter ſe quoque incommenſurabiles ſunt. Similiter $A^3$, $B^3$, incommenſurabiles erunt, & ſic quælibet aliæ eiuſdem gradus in infinitum.

Hinc conſtat falſum eſſe quod quælibet proportio irrationalis numerica cenſeri poſſit, & intercedat inter quantitates ſaltem potentia commenſurabiles, cum in ſupradictis progreſſionibus infinitis nunquam dignitates eiuſdem gradus commenſurabiles inter ſe ſint.

Et licet conſtaret quamlibet proportionem irrationalem eſſe aritmeticam, ob commenſurabilitatem dignitatum, ſeu potentiarum eiuſdem gradus, nunquam poſſet per demonſtrationem euinci quatuor quantitates irrationales habere eandem proportionem, niſi expreſſe oſtenderetur *cuius dignitatis* inter illas infinitas eſſent radices illæ propoſitæ irrationales. Hoc autem cum preſtari non poſſit vel ſaltem admitti non debeat ſine demonſtratione, fatendum eſt talem paſſionem radicum non perceptam, de qua ignoratur an ſit, conſtituere non poſſe definitionem ſcientificam.

Et ſiquidem dari non poſſet euidens paſſio declarans naturam proportionalium Aſſimetrarum excuſabiles eſſent Viri Clariſſimi, qui obſcuras & coniecturales definitiones tradiderunt. At hoc preſtitum a me fuit ante triginta quinque annos.

Hoc quidem affirmabunt eruditi lectores, ſi legere dignentur definitiones III. Libri meæ reſtitutionis, in cuius nona declaratur quando vna proportio *Aſimmetra* eſt Maior, vel minor proportione aliqua commenſurabili, ſiue numerica, vt in *Tabula III. Fig.* 23. ſi C, & D fuerint commenſurabiles inter ſe, ſcilicet ſi C fuerit qualibet partes ipſius D vt Verbi gratia tres quartæ, centumeſi-

da-

dari poſſe magnitudinem E quæ ſit $\frac{5}{4}$ ipſius B, & inſuper dantur innumerabiles magnitudines incommenſurabiles ipſi B quæ maiores ſint quam E, ſit hæc magnitudo A erit igitur A maior quam $\frac{5}{4}$ ipſius B. & tunc voco prop-nem Aſſimetram A ad B *maiorem prop-ne commenſurabili C ad D*. Similiter diminui poteſt A vt ſit minor quam $\frac{5}{4}$ ipſius B, dummodo A decurtata ſit in commenſurabilis ipſi B, & tunc voco prop-nem aſsimetram A ad B *minorem propor-ne commenſurabili quam habet C ad D*. Et talis æquidem paſsio ne dum eſt poſsibilis, ſed etiam euidenter cognita, expreſſa vocibus non ambiguis, ſed clarè ſignificantibus naturam ſubiecti definiti: & proinde talis definitio erit perfecta; & principium ſcientiæ.

Poſtea in definitione decima *tab. III. fig.* 24. comparando quatuor quantitates, quarum binæ quæque eiuſdem generis ſint inter ſe incommenſurabiles: vt ſi A, & B ſint Aſſimetræ, pariterque C, & D; certum eſt dari poſſe tertiam proportionem commenſurabilem, vt E ad F, quæ ſit Verbi gratia ſexquitertia, tunc ſi proportio Aſsimetra A ad B fuerit maior, quam numerica E ad F, verum proportio C ad D irrationalis quoque ſit minor eadem rationali proportione E ad F, ſcilicet ſi A fuerit maior quam $\frac{4}{3}$ ipſius B, verum C fuerit minor quam ſexquitertia alterius D. Tunc vocatur Aſſimetra proporrio A ad B *maior proportione incommenſurabili* quam habet C ad D.

Et hæc quoque paſſio eſt poſſibilis clara, & euidens; quia datis tribus quantitatibus, quarum prima ſit maior ſecunda, & tertia minor ſit eadem ſecunda, lumine naturæ percipimus primam quantitatem maiorem eſſe tertia.

Similiter in definitione vndecima *tab. III. fig.* 25. ſi earumdem irrationalium quatuor quantitatum proportio primæ ad ſecundam minor fuerit, & ratio tertiæ ad quartam ſit

maior

maior tertia commenſurabili proportione, ſcilicet ſi prima fuerit minor quam $\frac{4}{5}$ ſecundæ, & tertia ſit maior quam $\frac{4}{5}$ quantitatis quartæ, erit proportio Aſſimetra primæ ad ſecundam *minor irrationali proportione tertiæ ad quartam quantitatem*.

Nemo igitur negabit has definitiones eſſe legitimas, & principia ſcientiæ, cum euidentiſſime declarent naturam rei definitæ, & eam diſtinguant a qualibet alia.

Tandem in duodecima traditur definitio proportionalitatis irrationalium, eſtque negatiua ad inſtar definitionis Puncti Euclidis, quæ non minus ſcientifica, & euidens eſt quam affirmatiua. Quotieſcunque enim demonſtratur quod vna proportio non eſt maior, neque minor alia proportione, neceſſario illi æqualis erit.

Sed optaret forte quiſpiam naturam proportionalium incommenſurabilium per paſſionum affirmatiuam dignoſcere Hoc quidem fiet non per definitionem, cũ demonſtrari debeat ſicuti Theorema, vt ſuo loco videbitur. Sed interim definitio negatiua eſt ſufficientiſſima, per quam demonſtrantur in noſtro tertio libro omnes Propoſitiones libri V. Euclidis, & pariter paſsiones æque multiplicium, quæ pariter Theoremata ſunt.

Ceterum aduerto quod demonſtrationes, quæ factæ ſunt per deductionem ad inconueniens fieri etiam poterant directæ: nolui tamen immutare priorem formam huius reſtitutionis, quæ facilis eſt ob vniformitate in demonſtrationum. Sic puto hanc præcipuam Geometriæ partem hactenus dubiam, & obſcuram me reſtituiſſe.

Errores poſtea Typographi prudens lector excuſabit & corriget, at notabilis eſt peruerſio numerorum propoſitionum lib. VI. à decima quarta vſque ad 37. quæ omnes vnitate verum numerum excedunt.

# EVCLIDIS RESTITVTI A IOANN. ALPHONSO BORELLIO.

## LIBER I.

## PROOEMIVM.

GEOMETRIA, prȩcipua inter diſciplinas mathematicas, magnitudines conſiderat; atque vniuerſa ſpeculatio ſcientifica, quæ de tali ſubiecto fieri poteſt, verſatur, aut in contemplatione rationis *ſtructuræ, qua magnitudines formatæ ſunt*; aut in contemplatione proprietatum eſſentialium & paſſionum earundem magnitudinum. Cumque aliquæ magnitudinum ſtructuræ, atque paſſiones, ſint adeò faciles & euidentes, vt nedum nullam prorſus laborioſam inquiſitionem requirant; ſed nemo ſanæ mentis eis aſſenſum negabit: aliæ verò ſint adeò reconditæ & difficiles, vt nullo pacto concedi poſſint: ſitque innata nobis

via à notioribus ad ignota procedendi (cùm omnis doctrina intellectiua ex præexiſtenti, ſeu anticipatà cognitione fiat) debent euidentes conſtructiones, & paſſiones magnitudinum aſſumi vt principia, ex quibus ſcientificè diſcurrendo aliæ abſtruſæ & difficiles conſtructiones, & paſſiones venentur.

Attamen, ſiue faciles, ſiue difficiles ſint huiuſmodi contemplationes, ſemper nuncupari conſueuerunt propoſitiones; eo quod in qualibet earum aliquid contemplandum proponitur intellectui.

Patet ergo principia Geometriæ eſſe *Propoſitiones*, exponentes facilem rationem ſtructuræ qua magnitudines formantur; aut facilem & euidentem proprietatem, vel paſſionem earundem magnitudinum.

Et quoniam ſæpenumero magnitudines, habentes euidentiſſimam conſtructionem aut paſſionem, non habent proprium nomen; aut habent nomina æquiuoca, res diuerſas ſignificantia: propterea, vt quælibet magnitudo diſtinguatur à qualibet alia, nomen ipſi imponi debet, aut exponi germana nominis ſignificatio. Quapropter principiorum Geometriæ tria genera erunt.

Primùm vocatur *Definitio* in qua declaratur ſeu imponitur nomen alicui magnitudini, quæ habeat euiden-

demtiſſimam conſtructionem aut paſſionem: & talis conſtructio aut paſſio debet eſſe nedum vera, prima & notiſſima omnium quæ illi ſubiecto competunt; ſed etiam debet exponi clarè verbis non ambiguis, nec obſcuris: nam ſi hiſce conditionibus careret non produceret certiſſimam & euidentem ſcientiam, ſed potius coniecturalem & dubiam opinionem.

Secundum, in quo magnitudinis, cuius nomen impoſitum & vſu receptum eſt, exponitur aliqua euidens eius conſtructio: Et vocatur *Petitio*.

Tertium, in quo magnitudinis, iam nominatæ, exponitur euidens eius proprietas, aut aliqua manifeſta eius paſſio; & vocatur *Dignitas*, vel *Axioma*, aut *Pronunciatum*, ſiue communis notitia.

Et quoniam huiuſmodi Principia demonſtrari nequeunt, cùm ſint notiſſima; proptèrea tantummodo eorũ catalogus in veſtibulo huius ſcientiæ apponetur; vt poſtea, demonſtratiuè ſyllogizzando, ex eis deducantur veritates aliarum Propoſitionum reconditarum; quæ pariter ſubdiuiduntur. Propoſitio itaque difficilis, in qua contemplatur ratio ſtructuræ qua magnitudo aliqua formatur, vocabitur *Problema*: Illa verò Propoſitio abſtruſa, in qua con-

templatur proprietas vel paſſio aliqua magnitudinis, vocatur *Theorema*.

## DEFINITIONES.

I. CORPORIS *extremitates, nullam profunditatem habentes, vocentur* Superficies.

*In Figura prima, Tabula primæ* Facies ABCD longa & lata profunditate carens vocatur ſuperficies.

II. SVPERFICIEI *extremitates, nullam latitudinem habentes, vocentur* Lineæ.

III. LINEAE *extremitates, nullam longitudinem habentes, vocentur* Puncta.

Licet ſuperficies, linea & puncta non reperiantur ſeparata à corporibus; certum eſt tamen verè exiſtere in natura, & per abſtractionem poteſt vna ſine altera conſiderari; quia in quolibet corpore id quod tangitur & conſpicitur eſt ſola externa ſuperficies; & quando id vertitur circa ſe ipſum, aliquid quieſcens in eo reperitur, quod non erit corpus, cum integrum corpus moueatur rotando. Ergo pars immota erit ſimplex linea quę erit indiuiſibilis; cuius termini erunt Puncta. Patet ergo quod linea ex fluxu puncti generari poteſt; ſuperficies verò ex fluxu lineæ tranſuerſali; atque corpus ex fluxu ſuperficiei tranſuer-

ſuerſali gigni poteſt. Quæ tres ſpecies quantitatis continuæ poſſunt concipi infinitæ, ſi nimirum fluxus per infinitum ſpatium continuari intelligatur.

*LINEAM autem omnium breuiſſimam earum, quæ à puncto ad punctum extendi poſſunt,* Rectam *voco.* Tabula prima Fig.2. IV.

*SVPERFICIES, cui omni ex parte recta linea congruit,* Plana *vocetur.* Tabula prima Fig.3. V.

*QVANTITAS inclinationis duarum rectarum linearum, in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram, vocetur* Angulus Planus. Tab·I.fig.4. VI.

Si duæ rectæ lineæ AB, AC ſe mutuo tangant in A & non ſint in directum conſtituta, voco *Angulum planum*, non extenſionem linearum BAC, nec ſpatium ab eis, compreh enſum; nec relationem vnius ad alteram, ſed illam tantam determinatamque flexionem ſeu inclinationem lineæ AC verſus AB.

*SVPERFICIES plana ſub vno, vel aliquibus terminis comprehenſa,* Figura *vocetur, vt ſunt A, & B.* Tab. I. Fig. 5. VII.

*FIGVRA, quæ deſcribitur ex reuolutione rectæ lineæ finitæ in plano, circa alterum eius punctum extremum quieſcens, quouſque ad eum locum redeat, à quo moueri cæperat, vocetur* VIII.

 Cir-

Circulus, & *Punctum quieſcens vocetur* Centrum: *linea verò, ab extremo eius termino deſignata, dicatur* Circunferentia. *Et qualibet recta, à centro ad circunferentiam extenſa,* Radius *circuli nuncupetur, vel* Semidiameter. Tab. I. Fig. 6.

Vt ſi recta linea AB, circa punctum A quieſcens, reuoluatur in plano per B, D, & C, quouſque redeat ad locum AB, à quo moueri cæperat: Vocabitur figura plana, ex fluxu illius lineæ deſcripta, *Circulus*; & punctum A, *Centrum*; & linea BEDC, *Circumferentia*; & rectæ lineæ AC, & AB *Radij* Circuli vocentur.

IX. *FIGVRAE plana, qua à rectis lineis continentur, vocentur* Rectilineæ.

X. *ET qua à tribus rectis lineis,* Trilatera, *ſeu* Triangula *vocentur*. Tabula I. Fig. 7.

XI. *QVAE ſub quatuor,* Quadrilatera, *ſeu quadrangula*.

XII. *ET ſi à pluribus, quàm quatuor rectis lineis contineantur,* Multilateræ, *vel multangulæ dicantur, denominatæ à multitudine laterum, ipſam figuram comprehendentium*.

XIII. *MAGNITVDO magnitudinis menſura dicitur, cùm illa, multoties ſumpta, alteri æqualis fuerit*. Tabula I. Figura 8.

PE-

## PETITIONES, SEV POSTVLATA.

*A PVNCTO ad punctum lineam rectam ducere.* I.

*ET lineam rectam producere in continuum, & directum.* Tab. I. Fig. 9. II.

*ET quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.* Tab. I. Fig. 10. III.

*ITEM quacunque magnitudine data, poſſe aliam magnitudinem ſumi, vel maiorem, vel minorem.* IV.

Cum tales operationes non ſint mechanicæ non fiunt organis corporeis, ſed ope intellectus, concipiendo fluxum puncti, aut lineæ; & ideo erunt euidentiſſimæ operationes, & conſtructiones intellectuales.

## AXIOMATA, SEV PRONVNCIATA.

*QVAE eidem æqualia, inter ſe ſunt æqualia. Et quod vno æqualium* I.
*maius eſt, aut minus, maius quoque, aut minus eſt altero æqualium; & contra.* II.

*ET ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota quoque ſunt æqualia.* III.

*ET ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur ſunt æqualia.* IV.

*AEQVALIA addita, vel ablata ab inæqualibus, inæqualia faciunt.* V.

*DVPLA, tripla, &c. vel dimidia eiuſ-* VI.

 *dem*

*dem, vel æqualium, ſunt pariter æqualia.*

VII. *SI eadem magnitudo metiatur duas magnitudines, & earum compoſitum, atque differentiam menſurabit*: Tabula I. Fig. 11.

VIII. *TOTVM ſua parte maius eſt.*

IX. *TOTVM æquale eſt omnibus ſuis partibus, ſimul ſumptis.*

X. *QVAE ſibi mutuò congruunt, ſunt æqualia.*

Et quæ ſunt æqualia ſibi mutuò congruere poſſunt ope intellectus inflectendo, vel tranſportando partes earum & debitè eas collocando.

XI. *DVAE rectæ concurrentes, & ſe mutuò ſecantes, non habent aliquam partem communem*. Tab. I. Fig. 12.

XII. *DVAE rectæ lineæ, poſſunt quidem conſtituere angulum, ſed non claudere ſpatium, ſeu figuram efficere*. Tabula I. Fig. 13

*LINEAE omnes, à centro ad circumferentiam circuli ductæ, ſunt æquales inter ſe*. Tab. I. Fig. 16.

b Def. 8. Manifeſtum eſt hoc, quia *b* radij omnes AC, AD, &c. menſurantur ab eadem linea recta AC.

EVCL. Prop. 1. lib. I. PROPOSITIO I. *Super data linea recta terminata Triangulum, habens tria latera inter ſe æqualia, conſtituere. Vocetur tale triangulum* Aequilaterum. Tab. I. Fig. 14.

*Expoſit.* Sit quælibet data linea re-

recta AB, ſuper ipſam conſtruendum eſt triangulum, quod habeat tria latera inter ſe æqualia.

*Conſtructio.* Iuxta tertium Poſtulatum, facto centro A, interuallo verò rectæ AB, deſcribatur circulus CBD; Rurſus centro B interuallo eiuſdem rectæ BA, *a* alius circulus CAD deſcribatur. Et extenſo radio AB vſque ad circumferentiam circuli ACE in E, erit punctum E extra circulum CBD. Et quia linea curua ACE initium habet in A intra circulum CBD & pertingit ad punctum E extra eundem circulum poſitum: ergo curua linea ACE ſecabit circunferentiam circuli CBD alicubi vt in puncto C iam à puncto A ad C *b* recta ducatur; pariterque à puncto B ad C alia recta extendatur. Hic iam perfecta eſt conſtructio; facta enim eſt figura trilatera ABC, quam eſſe æquilateram pronuncio.

*a Poſt. 3.*

*b Poſt.*

*Demonſtratio.* Quoniam duæ rectæ lineæ AB, & AC ducuntur à centro A ad circunferentiam circuli BCD. *c* Ergo recta AC æqualis eſt rectæ AB. Rurſus quia rectæ BC, & AB ducuntur à centro B ad circunferentiam circuli CAD: *d* erit recta BC æqualis eidem rectæ BA. Iam ergo AC, quàm CB æquales ſunt eidem rectæ AB. *e* Quare AC, & CB æquales ſunt inter ſe. Et tres li-

*c Axio 12.*

*d Axio 12.*

*e Axio 1.*

lineæ rectæ AB, BC, & CA, claudentes triangulum ABC, æquales ſunt inter ſe.

*Concluſio.* Ergo ſuper data recta linea AB triangulum, à tribus lateribus æqualibus comprehenſum, conſtruximus: quod faciendum imperabatur in Propoſitione. Vocetur talis figura *Triangulum Aequilaterum.*

EVCL. Prop. 2. I. PROPOSITIO II. *Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ducere.* Tab. I. Fig. 15.

Sit datum punctum A, & data recta linea BC. Duci debet à puncto A recta linea, quæ ſit æqualis ipſi
a Pet. 1. rectæ BC. Ducatur à *a* puncto C ad A recta linea, ſi opus eſt; & ſu-
b Prop. 1. per *b* CA triangulum æquilaterum
c Pet. 3. ADC deſcribatur; & centro *c* C, interuallo CB circulus BE deſcri-
d Pet. 2. batur; & recta *d* DC in directum producatur ad partes C, quouſque circunferentiam circuli ſecet in
e Pet. 3. puncto E. Et rurſus *e* centro D, interuallo DE, alius circulus EG deſcribatur, ſecans rectam lineam DA, productam in G. Dico rectam AG æqualem eſſe datæ rectæ lineæ BC. Quoniam rectæ DE, & DG ducuntur à centro ad peripheriam circuli EG:
f axi. 12. *f* Ergo ſunt æquales inter ſe; & ab his auferuntur partes æquales AD, & CD (cùm
g axi 3. ſint latera trianguli æquilateri). *g*

Ergo

Ergo reſiduum AG æquale eſt reſiduo CE. Sed etiam CB æqualis eſt eidem CE; *h* cùm ſint ductæ à centro ad circunferentiam circuli BE. Ergo duæ rectæ BC, & AG æquales ſunt vni tertiæ CE. *i* ideoque æquales inter ſe. Quare ducta eſt à puncto A recta AG æqualis datæ BC. Quod erat faciendum.

h *ax.* 12
i *ax.* 1.

PROPOSIT. III. *Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.* Tab. I. Fig. 16.

EVCL. *prop.* 3. *I.*

Sit A linea recta minor, CB maior. Debet ex maiori CB abſcindi ſegmentum æquale ipſi A. Ducatur *a* à puncto B recta linea BD, quæ ſit æqualis ipſi A, & *b* centro B, interuallo BD, deſcribatur circulus DE, ſecans rectam CB in E puncto. Dico BE eſſe ſegmentum detractum æquale ipſi A. Quoniam BE æqualis eſt ipſi BD, *c* quia ductæ ſunt à centro ad peripheriam circuli; ſed ex conſtructione A æqualis eſt eidem BD. Quare A, & BE, cùm ſint vni tertiæ æquales: *d* erunt inter ſe pariter æquales. Duabus igitur datis, &c. quod erat faciendum.

a *Prop.* 2.
b *Pet.* 3
c *ax.* 12
d *ax.* 1.

PROPOSITIO IV. *Si in duobus triangulis, circa verticales angulos æquales, duo latera vnius æqualia fuerint duobus lateribus alterius tri-*

EVCL. *prop.* 4. *I.*

 *an-*

*anguli, ſingula ſingulis: erunt baſes æquales inter ſe; & triangula erunt æqualia; & duo anguli reliqui æquales erunt duobus reliquis angulis, ſinguli ſingulis, qui opponuntur æqualibus lateribus. Vocentur autem huiuſmodi triangula ſimiliter æqualia.* Tabula I. Fig. 17.

Sint duo triangula ABC, & DEF, quorum anguli verticales A, & D, æquales ſint inter ſe, & latus AB æquale ſit lateri DE, nec non latus AC æquale ſit lateri DF. Dico baſim BC æqualem eſſe baſi EF; & triangulũ ABC æquale triangulo DEF; & angulum B æqualem eſſe angulo E, quibus opponuntur æqualia latera AC, & DF; & angulum C æqualem eſſe angulo F, quibus opponuntur reliqua duo latera æqualia AB, & DE.

Facta intellectuali ſuperpoſitione trianguli ABC ſuper triangulum DEF, ita vt punctum A ſuper punctum D, & recta AB ſuper DE cadat; neceſſariò ſibi mutuo *a* congruent duæ rectę AB, & DE: pariterque angulus A angulo D congruet, propter æqualitatem; ideoque AC ſuper DF cadet: & propter eorum æqualitatem ſibi mutuò *b* congruent. vnde punctum C ſuper punctum F incidet. His poſitis dico baſes BC, & EF ſibi mutuò congruere. Si enim hoc verum non eſt,

a *Axiom. 9.*

b *Axiom. 9.*

cadant partes intermediæ ipſius BC ſupra, vel infra ipſam EF, vt in ſitu EKF; & tunc duæ rectæ lineæ EF, & EKF clauderent ſuperficiem; *c* quod eſt abſurdum. Non ergo baſis BC ſupra, vel infra baſim EF incidere poteſt, quando puncta extrema B, & C præciſè ſupra puncta E, & F cadunt. Quapropter neceſſe eſt baſes BC, & EF ſibi mutuò congruere; & *d* ideo inter ſe æquales erunt. Similiter triangula ipſa ABC, & DEF ſibi mutuò congruent; quandoquidem ſuperficies planæ ſunt, quarum omnia extrema ſe tangunt, & partes intermediæ triangulorum ſe ſe tangant neceſſe eſt, aliàs *e* linea recta non congrueret omni ex parte vtrique ſuperficiei planæ, quod eſt abſurdum. Ergò *f* triangula ABC, & DEF æqualia pariter ſunt inter ſe. Poſtremò anguli B, & E, cùm ſibi mutuò congruant, æquales erunt inter ſe, qui opponũtur æqualibus lateribus AC, & DF: *g* pariterque anguli C, & F ſibi mutuò congruent, eruntque inter ſe æquales, qui opponuntur lateribus æqualibus AB, & DE. Quapropter ſi in duobus triangulis, &c. quæ erant demonſtranda. Vocentur autem breuitatis cauſa duo triangula, iam dictas conditiones habentia, ſimiliter æqualia.

*c Axiom. 11.*

*d Axiom. 9.*

*e Defin. 5.*

*f Axiom. 9.*

*g Axiom. 9.*

PRO-

PROPOSITIO V. *Duo anguli, qui duos æquales angulos, vel eundem angulum conſequuntur, ſunt inter ſe æquales.* Tab. I. Fig. 18.

Sint duo anguli ABC, & DEF inter ſe æquales, & productis rectis lineis AB, & DE ad partes angulorum B, & E vſque ad K, & M. Dico angulos CBK, & FEM, qui eoſdem conſequuntur, æquales inter ſe eſſe. Quoniam angulus DEF ſupponitur æqualis angulo ABC. Ergo facta intellectuali ſuperpoſitione rectæ DE ſuper AB, atque puncti E ſuper B, ipſi *a* anguli DEF, & ABC ſibi mutuò congruent; ideoque recta EF cadet ſuper BC; ſed recta EM cadit ſuper rectam BK; quandoquidem rectæ *b* DE, & AB, in directum productæ vſque ad M, & K, ſibi mutuò congruentes, ſegmentum commune habere nequeunt. Ergo anguli FEM, & CBK ſibi mutuò congruent, & *d* propterea æquales inter ſe erunt.

a *Axiom. 9.*

b *Axiom. 10.*

d *Axiom. 9.*

Secundò vnius anguli ABC producantur rectæ lineæ AB, & CB, ad partes anguli B, in K, & O. Dico angulos ambos CBK, & ABO, (qui conſequuntur) eſſe inter ſe æquales. Intelligatur idem angulus abc applicatus ſupra alium angulum ABC ſibi ipſi æqualem, inuerſo modo; ita vt recta ab cadat ſupra rectam CB, atque recta

c b

c b cadat ſupra rectam AB. Manifeſtum eſt rectam e b k cadere e *Axiom.* 10.
præciſè ſupra BO; & recta o b cadet ſupra rectam KB. Quare f *Axiom.* 9.
f angulus ABO æqualis erit angulo CBK, quod erat oſtendendum.

Corollar. *Hinc colligitur duas rectas lineas ſe ſecantes, efficere angulos ad verticem æquales inter ſe.* T.I. F.18. EVC.I. *pro.* 15. *p.*

Nam in duabus rectis lineis AK, & CO, ſe ſecantibus in B, g oſtenſi ſunt duo anguli ad verticē ABO,& CBK æquales inter ſe; qui conſequebantur angulum ABC. Eadem ratione duo anguli ad verticem ABC, & KBO h æquales erunt inter ſe; cùm conſequantur eundem angulum ABO. g *Prop.* 5. h *Prop.* 5.

PROPOSITIO VI. *In triangulo, duo latera inter ſe æqualia habente, anguli, qui ad baſim ſunt, æquales erunt inter ſe; & productis æqualibus lateribus, anguli infra baſim poſiti æquales quoque inter ſe erunt. Vocetur huiuſmodi triangulum* Iſoſceliū. Tab. I. Fig. 19. EVCL. *prop.* 5. *I.*

Sit triangulum ABC, cuius latera æqualia ſint BA, & CA. Dico angulos ABC, & ACB, qui ſupra baſim ſunt, æquales eſſe inter ſe; & productis rectis AB, & AC infra baſim BC, vt in D, & E, eſſe angulos DBC, & ECB æquales quoque in-

*a Poſtul. 2.* inter ſe. Producantur *a* indefinitè latera BA, & CA ad partes verticis A, vt in G, & F; tam ex AG, quàm ex AF *b* ſecentur rectæ AM, & AH, ſingulæ æquales ipſi AB, vel AC; & coniungatur *c* recta HM. Et quoniam duo triangula BAC, HAM circa angulos, BAC, & HAM *d* æquales (cùm ſint ad verticem) habent latera æqualia, ſingula ſingulis, ex conſtructione. Ergo *e* angulo MHA æqualis eſt angulus CBA (cùm latera ſub eis ſubtenſa MA, & CA æqualia facta ſint). Eadé ratione *f* angulus ACB æqualis erit eidem angulo MHA (cùm pariter ſubtenſa latera BA, & MA æqualia poſita ſint). Quare duo anguli ABC, & ACB ſunt æquales vni tertio angulo MHA; ideoque *g* duo anguli, ſupra baſim ABC, & ACB æquales inter ſe erunt. Quod erat primo loco oſtendendum.

*b. prop. 3.* *c poſt. 1.* *d Corol. prop. 5.* *e prop. 4.* *f prop. 4* *g Axiom. 1.*

Rurſus quoniam duo anguli AB C, & ACB æquales oſtenſi ſunt. *h* Ergo duo reliqui, qui deinceps ſunt anguli DBC, & ECB æquales inter ſe erunt. Quapropter duo anguli infra baſim trianguli, latera æqualia habentis, ſunt inter ſe æquales. Vt erat probandum. Vocetur huiuſmodi triangulum Iſoſcelium.

*h prop. 5.*

PRO-

PROPOSITIO VII. *Si duo triangula tria latera tribus lateribus æqualia habuerint, ſingula ſingulis, erunt ſimiliter æqualia.* Tab. I. Fig. 20. EVCL. 8. lib. 1.

Sint duo triangula G, & H, atque latus AB æquale ſit lateri DE, & AC ipſi DF, partiterque BC æquale lateri EF. Dico angulum A æqualem eſſe angulo D, & B ipſi E, nec non C ipſi F. Intelligatur triangulum G, cum eius latere BC collocatum ſupra latus EF, ita vt punctum B in E cadat, *a* C verò in F, *a Axiom. 9.* propter æqualitatem; & triangulum non ad eaſdem partes, ſed ad oppoſitas cadat; tunc reliqua latera contermina erunt æqualia. Coniungatur tandem *b* recta AD; quæ aut *b poſt. 1* per punctum C tranſit, aut ſecat communem baſim BC, aut extra ipſam cadit.

(*fig.* 20.) In 1 caſu, cùm duo latera AB, & BD in triangulo *DAB* ſint æqualia ex *hypotheſi*, erit *c* triangulum ipſum iſoſcelium; ideoque *c prop. 6.* duo anguli A, & D ſupra baſim æquales erunt inter ſe, & ex quarta propoſitione triangula ipſa G, & H erunt ſimiliter æqualia.

(*fig.* 21) In 2 verò caſu erit triangulum ADB pariter iſoſceles: vnde *c* duo anguli BAD, & BDA æquales erunt inter ſe: Pari ratione *c prop. 6.* in triangulo iſoſcelio CDA duo anguli CAD, & CDA æquales erunt in-

inter ſe. Ergo ſi prioribus æquali-
bus hi poſteriores æquales addantur,
efficientur *d* duo anguli BDC, & *d axio. 2.*
BAC inter ſe æquales (*fig.* 22) Deniq;
in tertio caſu, ab angulis æqualibus
BDA, & BAD auferendo æquales
angulos CDA, & CAD relinquen-
tur *e* duo anguli BDC, & BAC in- *e axio. 3.*
ter ſe æquales; deinde *f* reliqui an- *f prop. 4*
guli æquales erunt. Quapropter ſi
duo triangula, &c. Quod erat oſten-
dendum.

EVCL. 9. 1. PROPOSITIO VIII. *Datum angulum rectilineum biſariam ſecare.* Tabula I. Fig. 23.

Sit angulus rectilineus BAC
Debet hic angulus diuidi in duos
angulos æquales. Sumatur in AB
quodlibet punctum D; & ex AC *a*, *a poſt. 2*
producta indefinitè, ſecetur *b* AE *b prop. 3.*
æqualis ipſi AD, & coniugatur *c* re- *c poſt. 1*
cta DE; & ſuper DE ad partes op-
poſitas deſcribatur *d* triangulum *d prop 1*
æquilaterum DFE; tandem à pun-
cto A ad F recta *e* coniungatur. Di- *e poſt. 1*
co AF problema efficere. Quoni-
am in duobus triangulis DAF, &
EAF latus AF eſt commune, & la-
tera DA, & AE ſunt æqualia, ex
conſtructione, & baſes DF, EF ſunt
æquales, cùm ſint latera trianguli
æquilateri. Ergo, ex præcedenti
propoſitione, anguli DAF, & EAF
ſunt inter ſe æquales. Quare angu-
lus

lus BAC diuiſus eſt bifariam à recta AF. Quapropter datum angulum bifariam ſecuimus; quod erat faciendum.

PROPOSITIO IX. *Datam rectam lineam biſariam ſecare.* Ta. I. Fig. 24. EVCL. 10. I.

Sit recta linea finita AB diuidenda bifariam. *a* Deſcribatur ſuper ipſam triangulum æquilaterum ACB, cuius angulus verticalis C *b* bifariam ſecetur à recta CD, diuidente baſim AB in puncto D. Dico punctum D eſſe quæſitum. Quoniam in triangulis ACD, & BCD circa angulos verticales ACD, & BCD æquales ex conſtructione, latus CD eſt commune, & latera AC, & BC ſunt æqualia; cùm ſint latera æquilateri trianguli. Ergo *c* baſis AD æqualis eſt baſi BD. Datam igitur rectam AB bifariam ſecuimus in D. Quod erat faciendum.

a prop. 1
b prop. 8.
c prop. 4

PROPOSITIO X. *Data recta linea, à puncto in ea dato rectam lineam eleuare, efficientem angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe. Vocetur vterque æqualium angulorum Rectus; & quæ inſiſtit recta linea Perpendicularis vocetur eius, cui inſiſtit.* Tab. I. Fig. 25. EVCL. 11. I.

Sit recta AB, & punctum in ea C, à quo debet educi linea, efficiens

ciens cum recta AB angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe. Sumatur quodlibet punctum D; atque
a prop. 3. ex altera parte, *a* ex CB, producta ſecetur linea CE æqualis ipſi C
b prop. 1. D; & ſuper DE *b* triangulum æquilaterum DFE deſcribatur; deni-
c poſt. 1 que à puncto C ad F *c* recta ducatur. Dico FC Problema efficere.

Quoniam duo triangula DCF, & ECF habent latus CF commune, & latera DC, & EC æqualia, ex conſtructione; nec non baſes F D, & FE æquales, cùm ſint latera
d prop. 7. trianguli æquilateri. Ergo *d* anguli FCD, & FCE æquales ſunt inter ſe; vt propoſitum fuerat. Vocentur ambo anguli ACF, & BCF Recti; & FC Perpendicularis dicatur ad rectam AB.

EVCL. 12. I. PROPOSITIO XI. *Super datam rectam lineam infinitam à puncto dato, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam ducere.* Tab. I. Fig. 26.

Sit AB recta interminata, & punctum extra ipſam C. Ducenda eſt à puncto C perpendicularis ſuper A B. Sumatur in recta AB quodlibet
a poſt. 1. punctum H, & iungatur *a* recta C
b poſt. 2 H; & producatur *b* vltra rectam A
c poſt. 3 B in G; & centro *c* C, interuallo CG, circulus DGE deſcribatur, cuius circunferentia neceſſariò ſecabit rectam AB: nam punctum G radij

CG

CG vltra rectam AB poſitum fuit. Secet igitur eam in punctis D, & E; poſtea *d* ſecetur DE bifariam in F, & ducantur rectæ CF, CD, & CE. Dico CF eſſe perpendicularem quæſitam. *d prop.9*

Quoniam in triangulis DFC, & EFC latus CF eſt commune, & DF æquale eſt ipſi FE, ex conſtructione; pariterque baſes CD, & CE æquales ſunt, cùm *e* à centro ad circunferentiam circuli ſint ductæ. Ergo *f* anguli DFC, & EFC æquaſunt inter ſe, ideoque *g* recti. Vnde CF perpendicularis eſt ad AB. Duximus ergo à puncto C perpendicularem ſuper AB. Quod erat, &c. *e Axio 12.* *f prop.7* *g Pro.1*

PROPOSITIO XII. *Cùm recta linea, ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet. At angulorum inæqualium, qui maior eſt recto, vocetur* Obtuſus: *Qui verò recto minor eſt,* Acutus. Tab. I. Fig. 27. EVCL. 13. I.

Recta linea AB inſiſtat rectæ CD faciatque angulos, qui ſunt deinceps, ABD, & ABC. Oſtendendum eſt, vel ambos eſſe rectos, vel ſimul ſumptos, duobus rectis æquales. Si enim AB perpendicularis eſt ad CD, *a* erunt anguli deinceps duo recti, ſin minùs erit alter acutus, alter obtuſus. *a Prop. 10.*

Ducatur alia recta linea FH, & à *prop.10*

quo-

quolibet eius puncto G educatur G E perpendicularis ad FH. Poſtea facta intellectuali applicatione rectę CD ſuper FH, vt punctum B cadat ſuper G illæ rectæ lineæ ſibi mutuo congruent; & ideo CB ſuper FG, nec non BD ſuper HG cadet, atq. BA ſuper GI. Igitur angulus maior DBA congruet angulis recto HGE & EGI ſimul ſumptis; Eſt vero angulus ABC æqualis IGF cui congruit. Ergo ſumma angulorum D BA & ABC æqualis eſt tribus angulis recto HGE, EGI & IGF ſimul ſumptis; ſed duo anguli EGI, & IGF conplent angulum rectum EG F. Igitur ſumma angulorum DBA & ABC æqualis eſt ſummæ duorum rectorum HGE & EGF. quare, &c.

EVCL. 14. l. I. PROPOSITIO XIII. *Si ad aliquod punctum recta linea duæ aliæ rectæ, non ad eaſdem partes ductæ, eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: indirectum erunt inter ſe duæ poſteriores rectæ lineæ.* Tab. I. Fig. 28.

Duo anguli deinceps poſiti ABC & ABD ſint æquales duobus rectis. Dico CB & BD in directum eſſe conſtitutas, ideſt efficere vnicam rectam lineam. Ducatur alia recta FGH & ab eius pűcto G a educatur perpendicularis GE. & quia ſumma angulorum CBA, & ABD æqua-

a prop. 10.

lis

lis eſt ſummæ duorum rectorum FGE, & EGH. Ergo facta intellectuali applicatione eorum vt CB cadat ſuper FG, & punctum B ſuper G; neceſſario ſibi mutuo congruent: & ideo duæ rectæ CB & BD cadent ſuper rectam lineam FH. Quare CBD vna recta linea eſt.

## AXIOMA XIII.

*Si recta linea, in ſuo extremo ſemper perpendiculariter conſtituta ſuper aliam rectam lineam, moueatur in transuerſum in eodem plano: alterum punctum extremum tranſlatæ rectæ lineæ in eius fluxu rectam lineam deſcribet.* Tab. I. Fig. 29.

Si enim recta linea AB, perpendiculariter erecta ſuper rectam lineam BC intelligatur tranſlata, in eodem plano, verſus C, hac lege, vt punctum B extremum ipſius AB ſemper contingat rectam lineam BC; pariterque, vt AB dum tranſfertur ſemper conſtituat cum BC angulos rectos. Manifeſtum eſt lineam AED, deſcriptam à puncto A fluente, eſſe rectam; eo quod omnia puncta lineæ AED æqualibus interuallis diſtant ab omnibus punctis rectæ BC menſuratis ab eadem perpendiculari tranſlata: & ideo fluxus puncti A per AED non eſt vacillans, non flexuoſus, ſed æquabilis & vniformis, vt exigit fluxus

bre-

breuiſſimus ſimilis fluxui puncti B per BC.

PROPOSITIO XIV. *Si ad duas rectas lineas in vno plano iacentes eadem recta perpendicularis fuerit, quaelibet alia recta interpoſita perpendicularis ad vnam earum aequalis erit illi, & erit quoque perpendicularis ad reliquam. Vocentur illae duae rectae inter ſe* Parallelae, *& recta linea ad eas perpendicularis, vocetur diſtantia parallelarum.* Tab. I. Fig. 30. 31.

Sit recta linea EF perpendicularis ad vtramque rectam AB, & CD, exiſtentes in eodem plano; & educta à puncto C a recta CA, perpendiculari ad CD, Dico primo CA occurrere ipſi BA ad eaſdem partes vltra CD verſus E vt in A; & CA aequalem eſſe ipſi EF. Si enim hoc verum non eſt ad eaſdem partes E ad quas tendit recta FE ſecetur b recta GC aequalis EF; & ſecetur c FD aequalis CF, & intelligatur GC transferri vſque ad D, ſemper perpendiculariter conſtituta in puncto C ſuper rectam CD; neceſſariò d punctum G in eius fluxu rectam GEH deſcribet, quae per punctum E tranſibit; quandoquidem GC, & EF aequales ponuntur. Patet quod recta GE ſecabit rectam EA, cum punctum G diuerſum ſit ab A. Et tandem iungantur e rectae lineae GF, &

a prop. 10.
b prop. 3
c prop. 3
d Axio 14.
e poſt. 2.

& HF. Quoniam duo triangula GCF, & HDF circa angulos rectos C, & D latera æqualia habent GC ipſi HD, & CF ipſi DF. *f* Ergo baſes GF, & HF æquales ſunt; pariterque anguli GFC, HFD inter ſe ſunt æquales; ſuntque anguli CFE, DFE recti. Igitur *g* reſidui anguli GFE, & HFE æquales ſunt; & circa eos latera GF HF æqualia oſtenſa ſunt, & EF eſt commune. Ergo *h* anguli GEF, & HEF æquales ſunt inter ſe; ideoque *i* recti. Erat autem angulus AEF ex *hypotheſi rectus. Igitur* anguli G EF, & AEF æquales inter ſe ſunt; pars & totum, quod eſt impoſſibile. Nulla ergo alia recta præter ipſam AC eſſe poteſt æqualis ipſi EF.

f *prop.4* g *Axio 3.* h *prop.4* i *Prop. 10.*

Dico ſecundò angulum CAE rectum eſſe. Quoniam recta CF perpendicularis eſt ad duas rectas AC, & EF; & alia recta AE perpendicularis eſt ad vnam ipſarum EF. Ergo, vt prius, erit recta AE æqualis ipſi CF, quæ eſt perpendicularis ad vtramque. Ducatur poſtea recta EC. Quia in triangulis AEC & FCE latus AC ipſi FE eſt æquale; atque AE ipſi FC æquale, & baſis CE communis. Ergo *l* recto angulo EFC æqualis eſt angulus C AE. Quare angulus CAE rectus erit, vt propoſitum fuerat. Vocentur rectæ lineæ AB & CD *Pa-*

l *prop.7*

*rallela*: & EF perpendicularis ad vtramque, vocetur *Diſtantia Parallelarum*.

Corollariũ. *Manifeſtum eſt duas parallelas AB & CD non concurrere, licet producantur in infinitum ad vtraſque partes. propterea quod vbique inter ipſas intercipi poteſt aliqua perpendicularis, vt eſt AC, vel BD, quæ ſemper æqualis eſſe debet ipſi EF, ſcilicet diſtantia parallelarum*. Ta. I. Fig. 31.

EVCL. 29. I. PROPOSITIO XV. *Recta linea ſecans duas parallelas, efficiet alternos angulos æquales; externum æqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes; atque internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.* Tabula I. Fig. 32.

Sint Rectæ lineæ AB & CD inter ſe parallelæ, ſecenturque à recta linea EF in punctis G & H. Dico primò alternos angulos AGF, & DHE æquales eſſe inter ſe. Ducatur *a* à puncto G recta GM perpendicularis ad rectam CD, ſecans eam in M, atque à puncto H ducatur HO perpendicularis ad AB, ſecans eam in puncto O. Et quoniam duæ rectæ AB & CD ſunt parallelæ; & GM perpendicularis eſt ad vnam ipſarum CD: erit *b* quoque eadem GM perpendicularis ad reliquam AB

*a prop. 11.*

*b prop. 14.*

AB;eſtq; HO perpẽdicularis ad AB. Ergo, vt in præcedenti prop. oſtenſum eſt, recta intercepta OH ęqualis erit GM; pariterque intercepta GO æqualis erit MH, propterea quod HO, GM ſunt quoque inter ſe parallelæ. Quare in triangulis OHG, MGH duo latera GO, & HO æqualia ſunt duobus lateribus HM, & GM, ſingula ſingulis; Eſtque baſis GH communis. Ergo *d* anguli alterni DHG, & AGH æquales ſunt inter ſe; pariterque eorum *e* complementa ad duos rectos, ſcilicet anguli BGH, & CHG æquales erunt inter ſe.

d *prop.* 7

e *prop.* 5

Dico ſecundò externum angulum EGB æqualem eſſe interno, oppoſito, & ad eaſdem partes conſtituto angulo GHD. Quoniam *f* propter parallelas AB, & CD æquales ſunt inter ſe alterni anguli DHG, & AGH, eſtque *g* angulus EGB æqualis eidem angulo AGH ad verticem eius. Ergo *h* angulus EGB æqualis eſt angulo GHD.

f *ex pa.* 1. *huius*

g *Corol. prop.* 5.

h *Axi.* 2.

Dico tertiò duos angulos AGH, & CHG internos, & ad eaſdem partes, eſſe æquales duobus rectis. Quoniam propter paralellas *i* ſunt duo anguli alterni AGH, & DHG æquales inter ſe, addito *l* communi angulo CHG: erunt dũo anguli AGH, & CHG, ſimul ſumpti, æquales duobus angulis DHG; & CHG,

i *part.* 1 *huius*.

l *Axi.* 2.

m prop. 12. ſed *m* hi, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis. Ergo duo anguli AGH, & CHG duobus rectis ſunt æquales. Quæ omnia demonſtrari debebant.

EVCL. 27. & 28. I. PROP. XVI. *Si in duas rectas lineas recta linea incidens, alternos angulos æquales inter ſe fecerit; aut externum angulum æqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes; aut duos internos ad eaſdem partes fecerit æquales duobus rectis: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.* Ta. I. Fig. 33.

In duas rectas lineas AB, & CD incidens, vtcunque, recta linea EF, ſecans eas in punctis G & H efficiat primò alternos angulos AGH, & DHG æquales inter ſe. Dico A B & C D inter ſe parallelas eſſe. Si enim hoc verum non eſt, à puncto G ducatur *a* recta linea GM perpendicularis ad CD, ſecans eam in M; atque à puncto G educatur *b* recta GN perpendicularis ad ipſam MG. Et quoniam eadem recta linea GM perpendicularis eſt ad duas rectas lineas CD & NG: erunt *c* lineæ rectæ CD & NG parallelæ inter ſe, quæ cùm ſecentur, vtcunque, à recta linea EF in punctis G & H: erunt *d* duo anguli alterni N GH, & DHG æquales inter ſe; ſed angulus AGH ſuppoſitus fuit æqualis eidem angulo DHG. Ergo *e* anguli

a Prop. 11.

b prop. 10.

c prop. 14.

d prop. 15.

e Axi. 1.

guli NGH, & AGH æquales ſunt
nter ſe, pars & totum, *f* quod eſt *f Axi. 7.*
bſurdum. Nulla ergo alia recta
inea NG præter ipſam AB eſſe po-
eſt parallela ipſi CD.

Sit ſecundò externus angulus E
GA æqualis interno, oppoſito, &
d eaſdem partes conſtituto angulo
GHC. Dico rectas AB, & CD
pariter parallelas eſſe. Quoniam
angulus CHG ſupponitur æqualis
angulo AGE, eſtque *g* angulus BG *g Corol.*
H æqualis eidem angulo AGE ad *prop. 5.*
verticem. Ergo *h* duo anguli CH *h ax. 1.*
G & BGH alterni inter ſe æqua-
les erunt: & ideò ex prima parte
huius, rectæ lineæ AB & CD pa-
rallelæ erunt.

Sint tertiò duo anguli interni ad
eaſdem partes, AGH & CHG, æ-
quales duobus rectis. Dico pariter
rectas AB, & CD parallelas eſſe.
Quoniam duo anguli AGH, & C
HG ſupponuntur æquales duobus
rectis; & ſunt *i* duo anguli DHG *i prop.*
& CHG deinceps, æquales duobus *12.*
rectis. Ergo duo anguli AGH, &
CHG, ſimul ſumpti, æquales ſunt
duobus angulis DHG, & CHG,
& ablato *l* communiter angulo CH *l Axi.*
G: erunt duo anguli AGH, & D *3.*
HG alterni, æquales inter ſe; &
ideò, ex prima parte, rectæ AB &
HD parallelæ erunt. Quæ omnia
oſtendenda fuerant.

EVCL. *prop.* 31 *I.* *Corollarium*. Conſtat, qua ratione à dato puncto duci poſſit recta linea, quæ parallela ſit alteri datæ. Si enim à puncto dato *m* ducatur perpendicularis ad datam rectam lineam; & *n* ab eodem puncto altera perpendicularis eleuetur ſuper alteram perpendicularem eductam: erit poſtrema perpendicularis parallela datæ rectæ lineæ. Nam in conſtructione primæ partis huius Propoſitionis à puncto G ducta eſt recta GM perpendicularis ad rectam CD; atque altera GN, perpendicularis ad ipſam MG, oſtenſa fuit parallela ipſi CD.

m *prop.* 12. n *prop.* 10.

EVCL. 30. *I.* PROPOSITIO XVII. *Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ ſunt, inter ſe quoque parallelæ erunt.* Tabula I. Fig. 34.

Sint eidem AB, tam CD, quàm recta EF parallelæ. Dico CD, & EF & inter ſe parallelas eſſe. Secentur omnes à recta GN in punctis H, M, N. Quoniam CD, & AB parallelæ ponuntur. Ergo *a* alterni anguli AHM, & DMH æquales ſunt inter ſe. Rurſus quoniam EF, & AB ſunt parallelæ. Ergo *b* alterni anguli AHN, & FNH æquales ſunt inter ſe. Ergo *c* duo anguli HMD, & MNF æquales ſunt inter ſe, cùm ſint æquales vni tertio AHM. ſed in duabus rectis CD & EF, cùm ex-

a *prop.* 15. b *prop.* 15. c *Axi.* 1.

externus angulus HMD æqualis oſtenſus ſit angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes MNF. Ergo *d* duæ rectæ CD, & EF inter ſe quoque parallelæ erunt. Quapropter, &c. d *pro.*16

PROPOSITIO XVIII. *Cuiuſcunque trianguli, vno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et tres interni anguli eius æquales ſunt duobus rectis.* Tabula I. fig. 35. EVC.I. 32.*I.*

Cuiuſlibet trianguli ABC, cuius latus BC productum ſit ad D: dico primò externum angulum DCA æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis A & B, ſimul ſumptis. Ducatur *a* ex C recta CE parallela ipſi AB. Quoniam AC ſecat ambas parallelas AB, & CE. Ergo *b* angulus ECA æqualis eſt alterno angulo A. Pari ratione BD, ſecans vtraſq; parallelas CE, & AB, faciet *c* externum angulum DCE æqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes angulo B. Quare duo anguli DCE, & ECA ſimul, ideſt *d* angulus externus DCA, æqualis erit duobus angulis B & A, ſimul ſumptis. a *Corol. prop.*16. b *pr.*15 c *prop.* 15. d *Axiom.* 8.

Dico ſecundò angulos A, B, & ACB internos eiuſdem trianguli, ſimul ſumptos, duobus rectis eſſe æquales. Quoniam DCA, externus

oſtenſus eſt æqualis duobus internis, & oppoſitis A, & B: Ergo addito *e* communi angulo ACB, erunt duo anguli DCA, & ACB ſimul, æquales tribus angulis A, B, & ACB ſimul ſumptis, ſed *f* duo anguli DCA, & ACB æquales ſunt duobus rectis. Ergo tres *g* anguli A, B, & ACB ſimul, æquales ſunt duobus rectis. Quod erat, &c.

*e Axiom. 2.* *f prop. 12.* *g Axiom. 1.*

EVCL. prop. 16 17. *I.* *Corollarium.* Hinc patet externum angulum quolibet interno, & oppoſito maiorem eſſe; Et duos internos angulos, cuiuſlibet trianguli, minores eſſe duobus rectis. Quandoquidem externus oſtenſus eſt æqualis duobus internis, & oppoſitis, ſimul ſumptis: atque tres, ſimul ſumpti, quantitatem duorum rectorum complent.

EVCL. 18. *I.* PROPOSITIO XIX. *Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.* Tabula I. Fig. 36

Sit latus AC maius latere AB in triangulo ABC. Dico angulum B maiorem eſſe angulo C. Ex maiore latere AC ſecetur *a* AD æqualis AB minori; iungaturque BD *b*. Ergo triangulum BAD iſoſcelium erit; ideoque anguli ſupra baſim ABD, & ADB inter ſe æquales: Eſt autem angulus ABC maior angulo ABD, totum ſcilicet ſua parte. Ergo

*a prop. 3* *b prop. 6*

go angulus ABC maior quoque erit angulo ADB. eſt c verò angulus ADB externus in triangulo BDC, & ideò maior angulo C interno, & oppoſito. Ergo multo magis angulus ABC maior erit angulo C. Quare maiori lateri AC opponitur angulus maior ABC. Quod erat oſtēdendum. c Corol. prop. 18.

PROPOSITIO XX. *Angulis æqualibus eiuſdem trianguli opponuntur latera æqualia. Et maiori angulo maius latus opponitur.* Tab. I. fig. 37. EVCL. 6. & 19 I.

Sit primò in triangulo ABC angulus A æqualis angulo C. Dico latus CB æquale eſſe lateri AB. Si enim hoc verum non eſt, ſit BC maius, aut minus, quàm AB. Ergo, ex præcedenti, angulus A maior aut minor erit, quàm C; quod eſt contra hypotheſim. Non ergo CB maius eſt, aut minus, quàm AB. Quare illi ſit æquale neceſſe eſt. Quod erat primo loco oſtendendum.

Sit ſecundò angulus A maior, quã B. Dico latus BC maius eſſe latere AC. Si enim hoc verum non eſt: erit BC, aut æquale, aut minus, quàm AC. Sit æquale, ſi fieri poteſt. Ergo a anguli B, & A æquales erunt inter ſe: poſitus autem fuit angulus A maior, quàm B. Ergo erunt æquales, & inæquales, quod a prop. 6

eſt abſurdum. Non ergo BC æquale eſt ipſi AC.

Sit tertiò minus, ſi fieri poteſt. Ergo ex præcedenti minori lateri BC opponitur minor angulus A, quod rurſus eſt contra hypoteſim: ſupponebatur enim angulus A maior, quàm B. Non ergo latus BC minus eſt latere AC, ſed neque æquale oſtenſum fuit. Ergo BC maius erit, quàm AC. Quapropter, &c.

EVCL. 20. I. PROPOSITIO XXI. *Cuiuslibet trianguli duo latera tertio ſunt maiora; & differentia duorum laterum minor eſt reliquo*. Tabula I. Fig. 38. & 39.

Sit quodlibet triangulum ABC. Dico primò duo quælibet eius latera, vt BA & AC, ſimul ſumpta, maiora eſſe tertio latere BC. Producto latere CA verſus A, ſecetur *a* DA æqualis ipſi BA, iungaturque recta BD. Quoniam in triangulo BAD duo eius latera BA, & DA æqualia ſunt inter ſe. Ergo *b* anguli ad baſim D, & ABD æquales ſunt inter ſe; eſtque angulus CBD maior partiali angulo ABD. Igitur angulus CBD maior eſt angulo D; & propterea *c* in triangulo CBD erit latus CD, angulum maiorem ſubtendens, maius latere BC: ſed DC æqualis eſt duabus rectis lineis BA, & AC, ſimul ſumptis (eo quod æqualibus BA & DA additur communis

*a prop. 3* *b prop 6* *c pr. 20*

munis AC) Ergo duo latera BA & AC, ſimul ſumpta, maiora ſunt tertio latere BC.

Secundò ex maiore latere BC ſecetur *d* CH æqualis AC eritque BH differentia duorum laterum BC, & CA. Dico iam BH minorem eſſe, quàm BA. Quia duo latera BA & CA maiora ſunt, quàm BC; ſi ab eis tollantur æquales HC, & CA: erit *e* BA, reſiduum maioris aggregati, maius, quàm BH. *d prop.* 3 *e Axiom.* 4.

PROPOSITIO XXII. *Si ab extremitatibus vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra ipſum conueniant, hæ ſimul ſumptæ, minores erunt duobus reliquis trianguli lateribus, ſimul ſumptis; maiorem verò angulum continebunt.* Tabula I. Fig. 40. EVCL. 21. I.

Sit triangulum ABC, & à punctis B, C concurrant intra triangulum duæ rectæ BD, & CD in D. Dico BD, CD ſimul, minores eſſe, quàm BA, CA, ſimul ſumptæ; ſed angulum BDC maiorem eſſe angulo BAC. Producta BD, ſecet AC in E: erunt *a* BA, AE, ſimul ſumptæ, maiores, quàm BE; & addita communi EC, erunt *b* duæ BA, & AEC maiores duabus BE & EC ſimul. *a prop.* 21. *b Axiom.* 4.

Rurſus *c* CE & ED ſimul, maiores ſunt, quàm CD; & addita communi DB, erunt *d* duæ CE, & EDB ſimul, maiores duabus CD, *c prop.* 21. *d Axiom* 4.

& DB. Quare AB, & AC ſimul ſumptæ, multo maiores ſunt, quàm BD & DC ſimul.

*e Corol. prop. 18.* Poſtea *e* angulus BDC externus in triangulo EDC maior eſt interno, & oppoſito CED: hic verò externus eſt in triangulo EAB, & ideo *f Corol. prop. 18.* *f* maior interno, & oppoſito angulo A. Quare angulus BDC multo maior erit, quàm angulus A. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 22. I. PROPOSITIO XXIII. *Datis tribus rectis lineis, triangulum conſtituere, cuius ſingula latera ſingulis datis rectis lineis æqualia ſint. Oportet autem, vt vnaquæque datarum linearum minor ſit reliquarum aggregato.* Tabula I. Fig. 41.

Sint tres rectæ lineæ A, B, & C, quarum duæ quælibet reliqua ſint maiores. Debet conſtitui triangulum, habens tria latera æqualia tribus datis rectis lineis. Sumatur quælibet recta linea DE indefinita, *a prop. 3* & in ea ſecetur *a* DF æqualis ipſi A, & ex reliqua ſecetur FG æqualis B; & tandem ſecetur GE æqualis C. *b poſt. 1* Deinde *b* centro G, interuallo GE circulus ENK deſcribatur. Et centro F, interuallo FD alius circulus DNH deſcribatur. Et quia ſingulæ rectæ DF, FG, & GE æquales ſunt ſingulis AB, & C; atque vnaquæque harum minor eſt aggregato duarum reli-

reliquarum. Ergo duæ quælibet ipſarum, DF, GE maiores ſunt tertia FG; ſunt verò eiuſdem circuli radii FH, FD interſe æquales, & ſic GK æqualis eſt EG. Igitur FH & GK ſimul ſumptæ maiores ſunt quam FG; & ablata communi portione FH remanet GK maior quam GH; & ideo punctum K peripheriæ KNE iacet intra circulum DNH, & terminus E iacet extra eundem circulum. Ergo duæ peripheriæ E NK, & DNH ſe mutuo ſecant: ſe ſecent in puncto N, & ducantur rectæ FN & GN. Et quia *c* FN æqualis eſt ipſi DF, cùm à centro ad peripheriam circuli DNH ducantur; eſtque recta A æqualis eidem DF. Igitur *d* FN æqualis eſt ipſi A. Similiter GN & GE ſunt radij eiuſdem circuli; & ideo *e* æquales: eſtque recta C æqualis eidem GE. Ergo *f* NG æqualis eſt ipſi C; atque recta FG facta eſt æqualis ipſi B. Igitur trianguli FNG tria latera æqualia ſunt tribus datis rectis lineis A, B, & C. Quod erat propoſitum.

*c Axiom. 12.*
*d Axiom. 1.*
*e Axiom. 12.*
*f Axiom. 1.*

PROPOSITIO XXIV. *Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo æqualem angulum conſtituere.* Tabula II. Fig. 1. EVCL. prop. 23 I.

Sit data recta linea AB, ad punctum eius C, debet conſtitui angu-

lus æqualis dato angulo E. Ducatur, vtcunque, recta DF, vt fiat triangulum DEF; poſtea *a* fiat triangulum CGH, cuius latera æqualia ſint tribus lateribus trianguli DEF, ſingula ſingulis, ita vt ad punctum C conueniant duo latera, CG quidem æquale ipſi DE, & CH æquale ipſi EF (fieri enim hoc poterit, cùm duo quælibet latera trianguli EDF reliquo ſint maiora) iam in his duobus triangulis omnia latera vnius æqualia ſunt omnibus lateribus alterius, ſingula ſingulis. Ergo *b* angulus C æqualis eſt angulo E; qui à lateribus GH, & DF æqualibus ſubtenduntur: Et hoc erat faciendũ.

*a prop. 23.*

*b prop. 7*

PROPOSITIO XXV. *Si in duobus triangulis fuerint duo anguli vnius æquales duobus angulis alterius, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quæ ſiue æqualibus angulis adiaceant, ſiue æqualibus angulis oppoſita ſint, erunt triangula ſimiliter æqualia.* Tabula II. Fig. 2.

EVCL. 26. I.

In triangulis ABC & DEF ſint latera AC & DF æqualia inter ſe, & angulus BAC æqualis angulo D, atque angulus ABC æqualis angulo E, ſiue ſint anguli BAC, & D æquales, pariterque anguli ACB, & F inter ſe æquales. Patet *a* in vtroque caſu tertium angulum vnius trianguli æqualem eſſe poſtremo angulo

*a prop. 28.*

lo alterius trianguli. Dico latera AB, & DE eſſe æqualia; pariterque latera CB, & FE inter ſe æqualia eſſe. Si enim hoc verum non eſt, ſit AB maius, aut minus, quàm DE: & ſecetur b AH æquale DE, iungaturque recta CH. *b prop. 3* Et quia circa æquales angulos A & D latera CA, & FD æqualia ſunt; pariterque latera HA & ED ſunt æqualia. Igitur c in triangulis ACH, & DFE erunt anguli ACH, & F æquales inter ſe. *c prop. 4* Erat autem angulus ACB æqualis eidem angulo F. Ergo d duo anguli ACH, & ACB æquales ſunt inter ſe, pars & totum, quod *d Axiom. 1.* e eſt impoſſibile. *e Axiom. 9.* Quare recta linea BA non eſt maior, neque minor, quàm ED, ſed æqualis erit. Eadem ratione latera CB & EF æqualia erunt. Quod erat probandum.

PROPOSITIO XXVI. *Quadrilaterum, cuius oppoſita latera ſunt parallela, habet angulos oppoſitos, & latera oppoſita æqualia inter ſe; atque diameter ipſum ſecat bifariam; ſed diametri viciſſim ſe ſe bifariam ſecant. Vocetur talis figura* Parallelogrammum. *Et perpendicularis, à ſummitate ad oppoſitam baſim ducta, vocetur* Altitudo *Parallelogrammi.* Tabula II. Fig. 3. EVCL. 34. *I.*

Sit quadrilaterum BD, cuius diameter AC, ſintque latera AB & D

C

C parallela inter ſe; pariterque latera AD, BC ſint parallela. Dico primò latera AB & DC inter ſe, nec non latera AD & BC æqualia eſſe. Secundò angulos B, & D inter ſe, nec non angulos BAD, BCD inter ſe æquales eſſe. Tertiò triangula ABC, & ADC, ſecta à diametro, æqualia eſſe. Quartò diametros AC, & BD ſe ſe mutuò bifariam ſecare in E. Quoniam in quadrilatero AC latera oppoſita AB, & DC ſunt parallela, & ſecantur ab AC. Ergo

a prop. 15. a anguli alterni BAC, & DCA æquales inter ſe ſunt. Similiter, quia

b Prop. 15. b rectæ AD, BC ſunt parallelæ, & ſecantur à recta AC. Ergo alterni anguli BCA, & DAC æquales ſunt inter ſe. Quare in triangulo BAC duo anguli ſupra baſim AC æquales ſunt duobus angulis trianguli DAC, ſuper eandem baſim adiacentibus, ſinguli ſingulis; & ideo

c prop. 25. c erunt triangula BAC, & DAC ſimiliter æqualia; & propterea quadrilaterum ipſum BD, ſectum erit à diametro AC bifariam. Poſtea latera AB, & DC, oppoſita angulis æqualibus alternis inter ſe; nec non latera oppoſita AD, & BC æqualia erunt. Deinde duo anguli oppoſiti B & D æquales erunt, quia eidem baſi AC opponuntur. Ruſus quia æqualibus angulis DAC, & BCA adduntur anguli æquales BAC & DCA

CA. Ergo *d* toti anguli oppoſiti D AB, & BCD æquales inter ſe erunt. Tandem quia in triangulis ABE & CDE, duo anguli BAE & DCE æquales oſtenſi ſunt, & anguli AEB, & CED ad verticem ſunt *e* æquales; & duo latera AB, & CD, ſubtendentia angulos æquales, oſtenſa ſunt æqualia. Ergo *f* AE ipſi EC æqualis eſt; nec non BE ipſi ED æqualis eſt. Quare patet propoſitum. Vocetur figura ABCD *Parallelogrammi*. Et recta à ſupremo latere AB ad oppoſitam baſim DC perpendiculariter ducta, vocetur *Altitudo parallelogrammi*.

d *Axiom.* 2.

e *Corol. prop.* 5.

f *prop.* 25.

PROPOSITIO XXVII. *Si in quadrilatero anguli oppoſiti inter ſe, aut latera oppoſita fuerint æqualia, vel duo latera oppoſita tantùm ſint parallella, & æqualia, erit ſemper Parallelogrammum.* Ta. II. Fig. 4.

EVCL. 33. *I.*

Sint primò in quadrilatero BD anguli B, & D inter ſe, pariterque A & C æquales. Dico B D parallelogrammum eſſe. Quoniam A & C æqualibus, ſi addantur anguli æquales D ipſi A, & B ipſi C: erunt *a* anguli A, & D ſimul, æquales duobus C & B: ſed quatuor *b* anguli cuiuſlibet quadrilateri æquales ſunt quatuor rectis: cum diuidi poſſit in duo triangula. Ergo duo anguli A, & D ſimul, duobus rectis ſunt æquales;

a *Axiom.* 2.

b *ex pr.* 18.

les;& ſunt interni ad eaſdem partes. Ergo *e* AB & DC parallelæ erunt. Eadem ratione AD, & BC parallelæ erunt; ideoq; ſpatium BD parallelogrammum erit.

*e Prop. 16.*

Sint ſecundò duo latera oppoſita AB & DC æqualia inter ſe, pariterque DA, & BC æqualia. Dico ſpatium eſſe parallelogrammum. Ducta diametro BD, erunt in triangulis ABD, & CBD ſingula latera ſingulis lateribus æqualia, & BD latus commune. Ergo *d* erunt ſimiliter æqualia, ideoque anguli oppoſiti A, & C æquales erunt, atque ADB, CBD inter ſe, nec non anguli ABD, CDB æquales erunt inter ſe. Quare *e* duo anguli ADB, & CDB, ſimul ſumpti, atque CBD & ABD, ſimul ſumpti, æquales erunt inter ſe. Igitur ex prima parte huius ſpatium ipſum erit parallelogrammum.

*d prop. 7*

*e Axiom. 2.*

Tertiò ſint latera oppoſita AB, & CD parallela, & æqualia tantummodo, idem ſequetur. Si enim hoc verum non eſt, ducta *f* BE parallela ipſi AD, fiet parallelogrammum ADEB. Cadet ergo recta BE citra, aut vltra punctum C. Ergo *g* latus DE æquale erit oppoſito AB, ſeu DC, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alibi, quàm in C puncto, cadit BE parallela ipſi AD. Quare ſpatium

*f Corol. prop. 16*

*g Prop. 26.*

AC

A C parallelogrammum eſt.

PROPOSITIO XXVIII. *Datam rectam lineam in quotcunque æquales partes diuidere.* Tabula II. Figura 5. EVCL. 9. VI.

Sit data recta linea AC, ſecanda in datam multitudinem partium æqualium. Ducatur à puncto A recta AB, efficiens in A quemlibet angulum CAB, & in AB ſecetur quodlibet ſegmentum AD, & fiant *a* ſucceſſiuè partes DE, EF, FB æquales ipſi AD, quæ tot ſint, quot partes æquales in AC debent contineri; iungaturque recta BC, & à punctis D, E, F intra triangulum ABC ducantur *b* rectæ DG, EH, FM parallelæ baſi BC, quæ ſecent rectam AC in G, H, M. Dico rectam AC ſectam eſſe in partes imperatas: à punctis D, E, F ducantur *c* rectæ DN, EO, FK parallelæ ipſi AC, ſecantes proximas parallelas in N, O, K. Et *d* quoniam, propter parallelas oppoſitas, ſpatium GDNH parallelogrammum eſt, erit *e* DN æqualis ipſi GH; cùmque in triangulis DNE, & AGD externus *f* angulus NDE æqualis ſit interno, & oppoſito angulo A, propter parallelas DN, AC; atque *g* internus angulus NED æqualis ſit externo, & oppoſito angulo GDA, propter parallelas HE, GD; atque duo latera adiacen-

a prop. 3

b Corol. prop. 16

c Corol. prop. 16

d Prop. 26.

e Prop. 26.

f prop. 15.

g prop. 15.

centia; DE, AD æqualia ſint facta. Ergo *h* latera DN, & AG æqualia ſunt inter ſe: erat autem GH æqualis eidem DN. Igitur *i* GH æqualis eſt ipſi AG. Eadem ratione HM, & MC oſtendentur æquales eidem AG. Quare AC ſecta erit in tot partes æquales AG, GH, HM, MC, quot ſunt partes imperatæ, contentæ in recta AB. Et hoc erat faciendum.

*h prop. 25.*
*i axio. 1*

Corollarium. *Facilè deducitur ex conſtructione & demoſtratione huius propoſitionis, quod ſi duæ rectæ angulum continentes diuidantur in totidem partes æqueles: Recta coniungentes puncta ſimilium diuiſionum erunt parallelæ interſe.*

Si enim HE non eſt parallela GD, ducatur HI parallela ipſi GD. Ergo ſicut GH æqualis ponitur ipſi AG; ita DI æqualis eſſe debet AD ſeu ei æquali DE. Quod eſt abſurdum: ergo ipſamet HE parallela eſt GD, & ſic reliquæ.

PROPOSITIO XXIX. *Si duo anguli interni ad eaſdem partes eiuſdem lineæ rectæ, ſecantis duas alias rectas, fuerint minores duobus rectis angulis: illæ rectæ lineæ, productæ, triangulum conſtituent.* Tab. II. Fig. 6.

*EUCL. poſt. V. vel axi. XIII. 1*

Sint duo anguli DAB, & CBA minores duobus rectis. Dico rectas line-

lineas AD, & BC concurrere ad partes D,C, & efficere triangulum. Ab A cadat AO perpendicularis ſuper BC eam ſecans in O; quia externus angulus COA æqualis eſt duobus internis & oppoſitis angulis B & BAO in triangulo OAB; ergo addito communiter angulo OAD, erunt duo anguli COA & OAD æquales tribus angulis B, BAO & OAD, ſeu B & BAD ſimul ſumptis; ſed hi minores erant duobus rectis. ergo rectus angulus COA vna cum OAD minores ſunt duobus rectis, & ideo angulus DAO acutus eſt: & à quolibet puncto E rectæ DA cadat perpendicularis EF ſuper AO, patet quod EF cadit ad partes anguli acuti DAO inter puncta A & O. Deinde ſecentur FK, KM, MH ſingulæ æquales ipſi AF quouſque AH maior efficiatur quam AO; & ſecentur partes ED, DI, IX ſingulæ æquales eidem AE, quæ totidem ſint quot in AH continentur, & coniungatur XHG quæ (ex præcedenti Corollario) parallela erit ipſis FE, & BOC; & ideo conſurget triangulum AGX in quo à puncto B ducta eſt recta BC intra ipſum triangulum AGX parallela baſi GX. igitur BC producta ſecabit reliquum latus ADX alicubi vt in R. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XXX. *Si in duobus parallelogrammis unus angulus uni angulo æqualis fuerit, atque baſes inter ſe, pariterque altitudines æquales fuerint: etiam parallelogramma erunt æqualia inter ſe.* Tabula *II.* Fig. 7.

In duobus parallelogrammis BD, & FH ſint anguli B, & F æquales, & baſes BC, FG æquales, atque perpendiculares, ſeu altitudines AK, EN æquales. Dico parallelogramma BD, FH æqualia eſſe. Ducantur diametri AC, EG. Quia in triangulis ABK, EFN ſunt anguli B & F æquales, & duo anguli recti K & N, atque latera AK, EN æqualia, quæ oppoſita ſunt angulis
a prop. 25. æqualibus. Ergo *a* BA, FE æqualia ſunt. Et quoniam circa angulos æquales B, F, latera AB, EF ſunt æqualia, atque latera BC, FG ſunt
b prop. 4 pariter æqualia. Igitur *b* triangula
c prop. 26 ABC, EFG æqualia ſunt, & *c* eorum dupla parallelogramma BD, FH æqualia quoque erunt. Quod, &c.

EVCL. 35. 30. I. PROPOSITIO XXXI. *Si duo parallelogramma non æquiangula baſes æquales, & altitudines æquales habuerint, erunt æqualia.* Tabula II. Fig. 8. 9. & 10.

In parallelogrammis AC, EG, æqui-

æquiangulis, ſint baſes BC, FG æquales, & parallelogrammorum altitudines ſint etiam æquales. Dico parallelogrammà AC, & EG eſſe æqualia. Fiat *a* angulus CBK æqualis angulo F, & ducatur *b* CN parallela BK, & producta AD ſecet parallelas BK;CN in K & N; factumque *d* erit parallelogrammum BCNK, cùm etiam AN ſit parallela BC. Quoniam in triangulis ABK, & DCN eſt *e* angulus CDN externus æqualis interno, & oppoſito angulo BAK (propter parallelas AB, CD); pariterque *f* internus angulus CND æqualis eſt externo BKA, in parallelis CN, BK, & duo *g* latera BA, CD, ſubtendentia æquales angulos, ſunt inter ſe æqualia, cùm ſint latera oppoſita parallelogrammi AC. Ergo *h* triangula ABK, & DCN æqualia ſunt inter ſe. Et (in primo & ſecundo caſu) addita *i* communiter figura BCDK, erit parallelogrammum AC æquale parallelogrammo BN. At (in tertio caſu) *l* ablato communiter triangulo DOK, erunt quadrilatera ABOD & NKOC æqualia inter ſe; additoque *m* communi triangulo BOC, erit pariter parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo BCNK. Iàm quia parallelogramma BN, & AC ſunt inter eaſdem parallelas AN & BC, erunt

a pr.24
b Corol. prop.16
c Corol. prop. 29
d Prop. 26.
e prop. 15.
f prop. 15.
g prop. 25.
h prop. 25.
i Axiom. 2.
l Axiom. 3.
m axio. 2.

n *prop.* 26. erunt n æquè alta; cùm omnes perpendiculares, ſeu diſtantiæ parallelarum AN & BC, æquales ſint. Poſita autem fuerunt parallelogramma FH & AC æquè alta. Igitur parallelogramma BN & FH æquè alta ſunt, & habent baſes BC, FG æquales inter ſe, atque angnlos KBC & F æquales inter ſe. Ergo parallelogrammum o FH æquale eſt parallelogrammo BN: Sed oſtenſum fuit parallelogrammum AC æquale eidem parallelogrammo BN. Igitur p parallelogramma AC, & FH æqualia ſunt inter ſe.

o *Prop.* 30.

p *Axiom.* 1.

EVCL. 37. 38. I. PROPOSITIO XXXII. *Triangula, quorum baſes æquales, & altitudines ſunt æquales, erunt æqualia inter ſe.* Tabula II. Fig. 11.

Triangula ABC, & DEF habeant baſes BC, EF æquales inter ſe, & perpendiculares, ſeu altitudines AO, DN à punctis A, D ad baſes BC & EF ductæ, ſint æquales. Dico triangula ABC, DEF eſſe inter ſe æqualia. Ducta a AG parallela ipſi BC, & CG facta parallela ipſi BA, fiat parallelogrammum ABCG. Pari ratione compleatur parallelogrammum EDFH. quoniam parallelogramma BG, & EH habent baſes BC, EF æquales, & altitudines æquales (cùm perpendiculares AO & DN ſint altitudines

a *Coroll. prop.* 16

paral-

parallelogrammorum BG & EH ) Ergo *b* parallelogramma BG & EH æqualia ſunt inter ſe, & eorum ſemiſſes *c* pariter æquales erunt: Suntque *d* triangula ABC & DEF dimidia parallelogrammorum B G & FH. Igitur triangula ABC & DEF æqualia ſunt inter ſe. Quod, &c.

b *prop.* 31.
c *Axiom.* 5.
d *pr.* 26

*Corollarium* I. Manifeſtum eſt, ſi parallelogrammum, & triangulum habuerint baſes æquales, atque altitudines æquales, eſſe parallelogrãmum *duplum ipſius trianguli.* EVCL. 41. *I.*

*Habent enim parallelogramma B G*, & triangulũ *DEF baſes BC & E* F æquales, atque altitudines etiam æquales; & oſtenſum fuit *e* triangulum ABC æqualẽ triangulo DEF. Ergo parallelogrammum BG (quod *f* duplum eſt ipſius trianguli ABC ) erit quoque duplum alterius trianguli DEF.

e *pr.* 32
f *pr.* 26

*Corollarium II.* Patet etiam quòd, *ſi fuerint* duo triangula æquè alta, & baſis vnius aliquoties metiatur baſim alterius, triangulum quoque toties reliquum triangulum metietur, quoties baſis baſim metitur.

Si enim *in* triangulis ABC, DEF, æquè altis, ipſa baſis EF metiatur aliquoties baſim BC, vt verbi gratia quater, atque à punctis diuiſionum M, R, & S, ad verticem A coniun-

gantur rectæ lineæ: diſtributum erit triangulum ABC in tot triangula ABM, AMR, ARS, ASC, quot ſunt baſes æquales BM, MR, RS, & SC. Suntque prædicta triangula æquè alta, tum inter ſe, tum ipſi DEF (quandoquidem à puncto A perpendicularis ad baſim BC ducta, altitudo communis eſt & æqualis altitudini trianguli DEF) & omnes baſes æquales ſunt. Igitur triangula *g* omnia, in quæ diſtribuitur triangulum ABC, æqualia ſunt, tum inter ſe, cùm ipſi triangulo DEF. Et propterea toties triangulum DEF metietur ipſum triangulum ABC, quoties illius baſis EF, huius baſim BC metitur.

*g prop. 23.*

EVCL. 42. I.

PROPOSIT. XXXIII. *Dato triangulo, æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo*. Tab.II. Fig.12.

Sit datum triangulum ABC, & angulus D. Deſcribendum eſt parallelogrammum æquale ipſi triangulo, habens angulum æqualem angulo D. Secta *a* BC bifariam in E, ducatur AE, & angulus CEF fiat *b* æqualis angulo D, & CG ducatur *c* parallela ipſi EF, & AG ducatur parallela ipſi BC. Patet *d* ſpatium CF parallelogrammum eſſe: quod cùm habeat eandem baſim EC cum triangulo ACE; ſintque præ-

*a Pr.9.* *b pr.24* *c Corol. prop.16* *d pr.26*

di-

dicta ſpatia inter eaſdem parallelas AG & EC. Ergo *e* parallelogrammum EG duplum eſt trianguli AEC; *f* ſed triangulum ABE æquale eſt triangulo AEC (cùm baſes BE & EC æquales, & eandem altitudinem habeant) Ergo duo triangula ABE & EAC ſimul, ideſt triangulum ABC, duplum erit trianguli AEC; Erat autem ſpatium EG duplum quoque eiuſdem trianguli AEC. Ergo *g* parallelogrammum EG æquale eſt triangulo ABC. Quapropter dato triangulo, &c. Quod erat *faciendum*.

*e Cor. 2 pro. 32.*
*f pr. 32*
*g Axiom. 5.*

PROPOSITIO XXXIV. *Super data recta linea quadrilaterum deſcribere, cuius omnia latera æqualia ſint inter ſe, atque omnes eius anguli recti ſint. Vocetur talis figura* Quadratum. Tab. II. Fig. 13.

EVCL. 46. I.

Sit data recta AB, ſupra quam figura imperata deſcribenda eſt. Eleuetur *a* CA perpendicularis ſuper AB, & *b* ſecetur CA æqualis ipſi AB; ducaturque *c* CD parallela ipſi AB & BD parallela alteri AC, conueniens *d* cum DC in puncto D. Dico ſpatium parallelogrammum AD eſſe æquilaterum & æquiangulum. Quia AD parallelogrãmum eſt; Ergo *e* latus CD æquale eſt oppoſito lateri AB; ſed eidem AB ex conſtructione eſt æquale

*a pr. 10.*
*b pr. 3.*
*c Corol. pror. 16.*
*d Cor. prop. 29*
*e pr. 26*

*f Axiom. 1.* CA. Ergo *f* CD æquale eſt ip
CA; Sed *g* rurſus eidem CA æqua
*g pr.26* le eſt latus illi oppoſitum BD. Erg
BD æquale eſt ipſi CD; eſtque
*h pr.26* eidem CD æquale latus *h* oppoſi
tum AB. Ergo BD & AB inter ſ
ſunt æqualia. Patet ergo omnia
latera parallelogrammi AD æqua-
*i pr. 15.* lia eſſe inter ſe. Quoniam *i* verò in
parallelogrammo AD duo intern
anguli A & C æquales ſunt duobu
rectis; eſtque A, ex conſtructione
rectus. Ergo C quoque rectus eſt
*l pr. 26* Cùmque *l* anguli B, & D ſuis op
poſitis ſint æquales. Ergo erunt an
guli B & D recti quoque; propte
reaque anguli omnes figuræ A I
recti erunt. Deſcripſimus ergo ſu
per AB figuram AD, quam oſtendi
mus eſſe æquilateram & æquiangu-
lam, vt quærebatur. Vocetur illa
*Quadratum.*

*Finis Libri primi.*

## *De Circulis*.

## DEFINITIONES.

*RECTA linea circulum tangere dicitur, cùm in circulum incidens, eum non ſecat.* I.

*CIRCVLVS circulum tangere dicitur, cùm unius peripheria, in alteram incidens, non ſecat circulum.* Tab. II. Fig. 14. II.

Poſito circulo BFD, ſi aliqua recta AB incidens in circulum, & producta eum non ſecat, *Tangens* vocabitur; pariterque peripheria BH, ſi incidat in circulum BD & eum non ſecet, *Tangens* appellabitur. At ſi producta circulum ſecat, vocabitur *Secans*.

*RECTA linea diciur applicari, ſeù coaptari circulo, cùm eius termini fuerint ad circuli peripheriam.* Tabula II. Fig. 15. III.

Vt recta linea AB coaptata erit, vel applicata circulo ABC, quando termini A & B ipſius rectæ lineæ fuerint in ipſa peripheria circuli AB

*SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.* Tabula II. Figura 16, 17, 18. IV.

Tam ſpatium B A D, quàm M NO, vel EFG. *Segmentum circuli*

dicitur. Hæc autem ſegmenta varia nomina ſortiuntur. Si enim centrum circuli fuerit intra eius ſuperficiem, dicetur *Segmentum maius*, vt eſt E F G; ſi verò extra ipſum fuerit, vt in BAD, dicetur *Segmentum minus*. Et tandem ſi centrum fuerit in ipſa recta linea ſecante, vt in MNO, tale ſegmentum appellabitur *Semicirculus*.

V. *ANGVLVS in ſegmento dicitur ille, qui à duabus rectis lineis concurrentibus in vno puncto circumferentiæ, & terminatis in extremitatibus rectæ lineæ, quæ baſis eſt ſegmenti, continetur.* Tab. II. Fig. 19.

Vt in ſegmento ABC duæ rectæ lineæ AB & CB concurrentes in quolibet eius puncto B, eductæ à terminis A, C efficiunt angulum ABC, conſtitutum in dicto ſegmento.

## AXIOMA.

*Duo circuli, quorum radij ſunt inter ſe æquales, erunt æquales inter ſe. Et contra circulorum æqualium radij æquales ſunt.*

EVCL. 1. & 25 lib. III. PROPOSITIO I. *Data circuli peripheria, reperire centrum circuli, cuius illa eſt peripheria.* Tabula II. Figura 20.

Sit data circunferentia ABC, ſiue integra, ſiue non. Debet reperiri cen-

centrum illius circuli, cuius ABC eſt peripheria. Sumantur in dicta circunferentia tria quælibet puncta A, B & C, & coniungantur rectæ A B & BC. Poſtea *a* ambæ bifariam ſecétur in punctis D & E, à quibus excitentur *b* perpendiculares, D F quidem ſupra AB & EF ſuper BC. Quia rectæ AB, BC non ſunt in directum, propter curuitatem peripheriæ ABC. Ergo coniuncta recta DE diuidet angulos rectos FDB & & FEB: & ideo duo anguli FDB & F E D minores erunt duobus rectis. *c* Quare D F, E F conuenient vt in F. *Dico* iam punctum F concurſus perpendicularium eſſe centrum illius circuli, cuius ABC eſt peripheria. Si hoc verum non eſt, ſit centrum circuli A B C punctum H, aliud quàm F, concurſus rectarum linearum DF, EF; ideoq; punctum H cadet, ſi non extra ambas, ſaltem extra vnam perpendicularium D F. Coniungantur rectæ AH, BH, DH. Quoniam in duobus triangulis AHD, DHB ſunt latera AD, B D æqualia, & D H commune, atque baſes AH, BH æquales, cum ſint radij circuli. Ergo *d* anguli ADH, BDH æquales ſunt; ideoque *e* recti: erat autem angulus ADF rectus. Igitur anguli A DF & ADH æquales ſunt inter ſe; pars & totum, quod eſt impoſſibile:

*a pr. 9. lib. 1.*
*b prop. 10. l. 1.*
*c pr 29 lib. 1.*
*d pr. 7. lib. 1.*
*e pr. 10. lib. 1.*

Non ergo punctum H aliud, quā F eſſe poteſt centrum circuli ABC & propterea id ipſum punct ū F centrum erit. Quod erat faciendum.

EVCL. 3. III. PROPOSITIO II. *Si applicatarum in circulo quædam recta linea, per centrum extenſa, aliam, non per centrum ductam, biſariam ſecet: ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, biſariam quoque ſecabit*. Tab. II. Fig. 21.

Per centrum A, circuli DBC, recta CE applicata, diuidat rectam BD, non per centrum extenſam, biſariam in F. Dico rectam CE perpendicularem eſſe ſupra BD. Ductis radijs BA & AD, erunt in triangulis AFD & AFB duo latera BF & FD æqualia, ex hypotheſi, & FA commune, & baſes AB & AD æquales, cùm ſint radij circuli. Ergo *a* anguli AFB & AFD æquales erunt, ideoque *b* recti. Quod erat primum.

*a pr. 7. lib. 1.*
*b pr. 10. lib. 1.*

Secundo AF per centrum ducta, ſit perpendicularis ad DB. Dico BD in F biſariam ſectam eſſe. Si enim hoc verū non eſt, ſecetur *c* BD biſariam in H alibi, quā in F; & iungantur ex centro rectæ lineæ AH, AB, AD. Et quia AH per centrum extenſa, ſecat rectam BD biſariam in H. Ergo (ex prima parte) angulus AHB rectus eſt: Erat autem

*c pr. 9. lib. 1.*

an-

angulus AFB rectus. Igitur in triangulo A H F externus angulus AHB æqualis eſt interno, & oppoſito angulo F. Quod *d* eſt abſurdum. Non ergo BD alibi, quàm in F ſecari poteſt bifariam. Quare patet propoſitum. d Cor. po.18.I.

PROPOSITIO III. *Si applicatarum in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuò ſecent, non per centrum extenſæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt.* Tab. II. Fig. 22. EVCL. 4. III.

In circulo ABD duæ rectæ lineæ AB & CD ſe mutuò ſecent in E, ſed non ambæ applicatæ per centrum F ſint ductæ. Dico non poſſe ſe ſe mutuò bifariam ſecare. Si enim vna earum per centrum tranſit, non ſecabitur bifariam ab altera non tranſeunte per centrum; eo quod ſolummodo in centro diameter bipartitur. Sed ſi neutra per centrum tranſit, ex centro F ducatur recta FE ad concurſum E. Oſtendendum eſt rectas AB & CD in puncto E ſe ſe non ſecare bifariam. Si enim hoc verum non eſt, ſint ambæ in puncto E ſectæ bifariam. Et quoniam FE, per centrum ducta, ſecat bifariam AB. Ergo *a* ad angulos rectos eam ſecabit. Eadem ratione recta CD ab ipſa FE ſecabitur ad rectos angulos. Quare anguli FEB & FED recti erunt. Ideoq; æqua- a pr. 2. lib. 2.

Non ergo punctum H aliud, quàm F eſſe poteſt centrum circuli ABC, & propterea id ipſum punctũ F centrum erit. Quod erat faciendum.

EVCL. 3. III. PROPOSITIO II. *Si applicatarum in circulo quædam recta linea per centrum extenſa, aliam, non per centrum ductam, biſariam ſecet: ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, biſariam quoque ſecabit.* Tab. II. Fig. 21.

Per centrum A, circuli DBC, recta CE applicata, diuidat rectam BD, non per centrum extenſam, biſariam in F. Dico rectam CF perpendicularem eſſe ſupra BD. Ductis radijs BA & AD, erunt in triangulis AFD & AFB duo latera BF & FD æqualia, ex hypotheſi, & FA commune, & baſes AB & AD æquales, cùm ſint radij circuli. Ergo *a* anguli AFB & AFD æquales erunt, ideoque *b* recti. Quod erat primum.

*a pr. 7. lib. 1.*
*b pr. 10. lib. 1.*

Secundo AF per centrum ducta, ſit perpendicularis ad DB. Dico BD in F biſariam ſectam eſſe. Si enim hoc verũ non eſt, ſecetur *c* BD biſariam in H alibi, quã in F; & iungantur ex centro rectæ lineæ AH, AB, AD. Et quia AH per centrum extenſa, ſecat rectam BD biſariam in H. Ergo (ex prima parte) angulus AHB rectus eſt: Erat autem

*c pr. 9. lib. 1.*

an-

angulus AFB rectus. Igitur in triangulo A H F externus angulus AHB æqualis eſt interno, & oppoſito angulo F. Quod *d* eſt abſurdum. Non ergo BD alibi, quàm in F ſecari poteſt bifariam. Quare patet propoſitum. d Cor. po. 18. I.

PROPOSITIO III. *Si applicatarum in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuò ſecent, non per centrum extenſæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt.* Tab. II. Fig. 22. EVCL. 4. III.

In circulo ABD duæ rectæ lineæ AB & CD ſe mutuò ſecent in E, ſed non ambæ applicatæ per centrum F ſint ductæ. Dico non poſſe ſe ſe mutuò bifariam ſecare. Si enim vna earum per centrum tranſit, non ſecabitur bifariam ab altera non tranſeunte per centrum; eo quod ſolummodo in centro diameter bipartitur. Sed ſi neutra per centrum tranſit, ex centro F ducatur recta FE ad concurſum E. Oſtendendum eſt rectas AB & CD in puncto E ſe ſe non ſecare bifariam. Si enim hoc verum non eſt, ſint ambæ in puncto E ſectæ bifariam. Et quoniam FE, per centrum ducta, ſecat bifariam AB. Ergo *a* ad angulos rectos eam ſecabit. Eadem ratione recta CD ab ipſa FE ſecabitur ad rectos angulos. Quare anguli FEB & FED recti erunt. Ideoq; æqua- a pr. 2. lib. 2.

les inter ſe; pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo ambæ rectæ AB & CD in puncto E ſe ſe bifariam ſecant. Quapropter, &c.

EVCL. 2. *III.* PROPOSITIO IV. *Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint, recta linea ipſa puncta coniungens, intra circulum cadet,* Tab. II. Fig. 23.

In circulo ABE recta linea AB coniungat duo quælibet puncta, in eius peripheria aſſumpta, A & B. Dico rectam AB intra circulum cadere. Sumpto enim quolibet puncto intermedio D in recta AB, à centro C coniungantur rectæ CA, CB, CD. Quoniam in triangulo iſoſcelio CAB duo latera CA & CB æqualia ſunt. Ergo *a* anguli, ſupra baſim, A & B æquales inter ſe erunt. Eſt autem angulus CDA externus *b* maior interno B in triangulo CBD. Igitur idem angulus CDA maior erit angulo CAD; & propterea *c* latus AC, oppoſitum maiori angulo, maius erit latere DC. Quare recta CD minor erit radio circuli CA; ideoque CD ad peripheriam circuli non perueniet. Vnde punctum D intra circulum exiſtet. Eadem ratione quodlibet aliud punctum ipſius rectæ AB intra circulum cadet, & propterea ipſamet recta linea AB, intra circulum

*a prop. 6 lib. 1.*

*b Corol. pr. 18.*

*c pr. 20 lib. 1.*

lum extenſa erit. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO V. *Si duo circuli ſe ſe mutuò ſecent, ſiue interius tangant, non erit eorum idem centrum.* Tabula II. Fig. 24. EVCL. 5. & 6. III.

Sint duo circuli AB & AC, qui ſe ſe ſecent, vel tangant in puncto A. Dico ipſos non habere idem centrum. Si enim fieri poteſt, ſit vtriuſque centrum D; à quo recta DA ad tactum, vel ſectionem ducatur, & altera DCB, ſecans vtramque peripheriam in punctis C & B. Quoniam D eſt centrum circuli AB. Ergo a radius BD æqualis eſt radio DA. Rurſus quoniam D ponitur centrum circuli AC, erit radius CD æqualis eidem radio DA: ideoque duæ rectæ BD & CD æquales erunt inter ſe; pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duo circuli AB & AC commune centrum D habere poſſunt. Quod erat oſtendendum.

a *Axi. 12. lib. 1.*

PROPOSITIO VI. *Rectarum, ad peripheriam cadentium à puncto, quod circuli centrum non eſt, maxima eſt illa, quæ per centrum tranſit; minima verò reſiduum, vel productio diametri; reliquarum verò, quæ maiorem angulum ad centrum ſubtendit maior erit ſubtendente angulum mi-* EVCL. 7. & 8. III.

ptæ, maiores ſunt, quàm duæ CF & FD; & ab his inæqualibus aggregatis tollantur æquales CG, CF, radij circuli; erit g reſidua GD maior reſidua FD.

g *Axi. 4. lib. 1.*

Quartò fiat h angulus ad centrum DCN æqualis angulo DCE, & coniungatur DN. Quoniam in triangulis DCN & DCE circa angulos æquales ad centrum habent latera NC & CE æqualia (cùm ſint radij circuli), & CD latus commune. Ergo l baſes DN & DE æquales ſunt; ſed quælibet alia, quæ vltra punctum E, vt eſt DF, ducitur, maior oſtenſa eſt, quàm DE, eo quod maiorem angulum ad centrum DCF ſubtendit. Ergo maior quoque erit, quàm DN. Rurſus quælibet alia ducta citra DE verſus punctum A minor oſtenſa eſt, quàm DE. ergo minor quoque erit, quam DN. Vnde duæ ſolummodo DN & DE æquales duci poſſũt ad vtraſque partes diametri. Quod erat oſtendendũm.

h *prop. 24. lib. 1.*

l *prop. 4. lib. 1.*

EVCL. 9. *III.* *Corollarium I.* Si in circulo acceptum fuerit punctum, & ab eo ad peripheriam cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales inter ſe: acceptum punctum centrum erit circuli. Quia à quolibet puncto, quod centrum non eſt, duæ ſolummodo rectæ lineæ æquales duci poſſunt,

ſunt, & non plures, vt conſtat ex poſtrema parte propoſitionis. Ergo punctum, àquo plures, quàm duæ rectæ, æquales cadunt, non poterit eſſe non in centro collocatũ. Quare centrum ſit neceſſe eſt.

*Corollarium II.* Colligitur ex tertia parte huius propoſitionis, quòd, ſi fuerint duo triangula, habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, angulus verò cõprehenſus maior angulo comprehenſo à dictis lateribus: erit baſis maior baſe. *In triangulis enim D CM & DCH latera MC, HC æqualia erant, & latus DC* commune, & angulus DCM maior angulo DCH, & oſtenſa fuit baſis DM maior baſe DH. E conuerſo ſi DM maior ſit quam DH erit angulus M CD maior angulo DCH, quia DM magis recedit à termino A peripheriæ quam DH. EVCL. 24. & 25. I.

PROPOSITIO VII. *Circulus circulum in pluribus, quàm in duobus punctis, non ſecat.* Tabula II. Fig. 27. EVCL. 10. III.

Secent ſe ſe duo circuli ABCD, ARHD, ſi fieri poteſt, in tribus punctis A, B, & D; & reperto a centro O circuli ABC, ab eo ducantur radij OA, OB & OD ad tria puncta ſectionum circulorum, qui radij æ- a prop. 2 huius.

qua-

quales erunt inter ſe. Et quoniam intra circulum alium ARBH ſumptum eſt punctum O, & ab eo cadunt in circuli peripheriam plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales OA, OB & OD. Ergo *b* punctum O centrum eſt circuli ARBH; erat autem idem punctum O centrum alterius circuli ABC. Ergo duo circuli, ſe ſe ſecantes, habent idem centrum, quod *c* eſt abſurdum. Non ergo duo circuli ſe ſe ſecant in pluribus, quàm in duobus punctis. Quod erat oſtendendum.

*b Corol. prop. 6. huius*

*c prop. 5 huius.*

EVCL. 11. & 12. III.

PROPOSITIO VIII. *Recta per centra duorum circulorum ſe tangentium producta, per contactum tranſibit.* Tabula II. Fig. 28. 29.

Sint duo circuli AE, cuius centrum B & AD, cuius centrum C ſe ſe interius, vel exterius tangentes in A. Dico duo centra B, C & contactum in vna recta lineã eſſe. Si hoc verum non eſt, recta linea BC, centra coniungens (producta), ſecet peripheriã circuli AE in punctis H, E & peripheriã circuli AD in puncto D. Et quoniam ſũptum eſt punctum C, quod non eſt centrum circuli AEH (intra ipſum in prima figura, & extra in ſecunda) atque à puncto C per centrum B ducta eſt recta linea CEBH: erit *a* CE, (quæ eſt reſiduum diametri HE)

*a prop. 6 huius.*

HE ) minima omnium rectarum, ex puncto C cadentium in peripheriam circuli AEH. Ergo CE minor eſt, quàm CA; eſtque *b* CA radius æqualis radio CD in circulo AD. Ergo CE minor erit, quàm CD, totum minus ſua parte, quod eſt abſurdum. Non ergo recta BC, centra coniungens ( producta ) ſecat circulos alibi, quàm in eorum contactu A. Quod erat oſtendendum. b *Axio* 12. *lib.* 1.

PROPOSITIO IX. *Circulus circulum in vno tantùm puncto, ſiue intus, ſiue extra tangit.* Tabula II. Fig. 30. 31. EVCL. 13. III.

Circulus CE, cuius centrum A, tangat circulum CD, cuius centrum B, in C ( interius quidem, vt in prima figura, exterius, vt in ſecunda ) Dico in vnico puncto tantummodo circulos ſe tangere. Ducta per contactum C, & per centra B & A recta linea BAC, quæ vnica recta erit, vt in proxima propoſitione oſtendimus, & producta ad punctum G, & ducta, vtcunque, alia recta AED, ſecante peripherias circulorum in punctis E & D. Quoniam in circulo CD ſumptum eſt punctum A, quod non eſt eius centrum, atque ab eo ductæ ſunt plures rectæ AC & AD, eſtque AC complementum diametri CG; Ergo *a* AC minima eſt omnium, a *prop.* 6. *huius*

ideo-

ideoque minor, quàm AD; ſed A E æqualis eſt ipſi AC, quia ſunt radij eiuſdem circuli CE. Ergo AE minor eſt, quàm AD: ideoque punctum D vltra punctum E conſtitutum eſt: & propterea punctum D peripheriæ CD extra circulum CE cadit; & ſic quodlibet aliud punctum peripheriæ circuli CD extra circunferentiam CE cadere oſtendetur. Cùm ergo omnia puncta peripheriæ CDG cadant extra peripheriam circuli CE, excepto puncto C. Ergo dicti circuli in puncto C tantummodo ſe ſe tangunt. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 14.III. PROPOSITIO X. *Perpendiculares, à centro ad æquales rectas lineas, in circulo applicatas ductæ, erunt inter ſe æquales. Et ſi perpendiculares inter ſe fuerint æquales, erunt quoque applicatæ inter ſe æquales. Dictæ perpendiculares vocentur* Diſtantia rectarum linearũ, *applicatarum à centro.* Tab. II. Fig. 32.

In circulo ABC, cuius centrum E, ſint applicatæ duæ rectæ æquales AB & CD: ad quas ſint ex centro E perpendiculares EF & EG. Dico EF & EG æquales eſſe. Coniungantur rectæ EA, EB, EC & E D. Quoniam in duobus triangulis ABE & DEC duo latera AE, BE æqualia ſunt duobus lateribus DE

&

& CE, atque baſes AB & DC ponuntur æquales: Ergo *a* erunt anguli A & D æquales inter ſe; cùmque in triangulis AFE, DGE ſint duo anguli recti F & G æquales; nec non anguli A & D oſtenſi æquales; atque latera AE & DE æqualia, ſubtendentia angulos rectos (cùm ſint radij eiuſdem circuli). Igitur *b* latera EF & EG (quæ ſunt perpendiculariter ex centro ad applicatas ductæ) æqualia ſunt inter ſe. *a prop. 7. lib. 1.* *b prop. 25. lib. 1.*

Sint ſecundò perpendiculares EF & EG æquales. Dico applicatas *AB & CD* æquales eſſe. Si enim hoc verum non eſt, quælibet earum, vt CD, ſit maior reliqua, & perpendiculares EF, EG ex centro ſecant *c* eas bifariam in G & F. Ergo etiam GD, ſemiſſis maioris CD, erit maior, quam FA, medietas minoris. Secetur *d* iam ex maiori GD recta linea GH æqualis ipſi FA, iungaturque EH, quæ (producta) ſecet circumferentiam in O. Et quia in triangulis AFE & HGE circa angulos rectos F & G ſunt duo latera AF & HG æqualia, pariterque EF & EG fuerunt æqualia. Ergo *e* baſis EH æqualis erit baſi EA; eſtque EA circuli radius. Ergo EH æqualis eſt radio EA, ſiue EO, pars æqualis toto, quod eſt abſurdum. Non ergo CD maior erit, quàm AB. Eadem ratione non erit *c prop. 2 huius.* *d prop. 3. lib. 1.* *e prop. 4 lib. 1.*

mi-

minor. Quare AB & CD æquales erunt, vt fuit propoſitum. Vocentur perpendiculares EF & EG diſtantiæ rectarum AB & CD à centro E.

EVCL. 15. III. PROPOSITIO XI. *Rectarum applicatarum in circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem centro propinquior remotiore ſemper maior eſt.* Tabula II. Fig. 33.

In circulo ABC, cuius centrum G, ſit diameter AF & HI propinquior centro, quàm CD. Dico maximam omnium eſſe AF & HI maiorem, quàm CD. Ducantur *a* (a prop. 11. lib. 1.) diſtantiæ, ſeu perpendiculares ex centro, GK & GL ſuper CD & HI; erit GK diſtantia maior, quàm GL ex hypotheſi. Secetur *b* (b prop. 3. lib. 1) ergo GM æqualis ipſi GL, & per M ducatur *c* (c Prop. 10.) BME perpendicularis ad GM, & coniungantur rectæ GB, GC, GD & GE. Quoniam diſtantiæ GM & GL æquales ſunt. Ergo rectæ *d* (d prop. 10. huius.) BE & HI æquales inter ſe erunt: Et quia duæ rectæ BG & GE, quæ ſimul, æquales ſunt diametro AF, maiores *e* (e Prop. 21. lib. 1.) ſunt, quàm BE, erit diameter AF maior, quàm BE, ſeu, quàm HI. Eadem ratione AF maior erit quacunque alia CD. Poſtea quia duo latera BG & GE trianguli BGE æqualia ſunt duobus lateribus CG & GD alterius trianguli

guli DGC, eſtque angulus BGE maior ſua parte angulo CGD. Ergo *f* baſis BE maior eſt baſe CD, ideſt HI maior eſt, quàm CD. Quapropter, &c.

*f Corol. 2. prop. 6. huius*

PROPOSITIO XII. *In dato circulo rectam lineam applicare æqualem datæ rectæ lineæ; oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non eſſe maiorem.* Tab. II. Fig. 34.

*EVCL. 1. IV.*

In circulo ABC, cuius diameter AC, debet applicari linea recta, quæ æqualis ſit datæ rectæ D; ſed oportet lineam D eſſe æqualem, aut minorem diametro AC. Si fuerit æqualis, factum erit problema: Si verò D minor fuerit diametro AC, ſecetur *a* AE æqualis ipſi D, & centro A, radio AE deſcribatur circulus EB, ſecans priorem in B, & iungatur recta AB. Dico lineam rectam AB problema efficere. Quoniam D æqualis facta eſt ipſi AE & AB æqualis eſt eidem AE (cùm ſint radij circuli EB). Ergo recta AB, applicata in circulo ABC, æqualis eſt datæ rectæ D. Quod erat faciendum.

*a prop. 3. lib. 1.*

PROPOSITIO XIII. *In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm eadem peripheria fuerit baſis angulorum.* Tab. II. Fig. 35. 36. 37.

*EVCL. 20. III.*

In circulo ABC, cuius centrum D, conſtituantur ſuper arcum BC duo anguli BDC, ad centrum, & BAC ad peripheriam. Dico angulum BDC duplum eſſe anguli BAC. Ducatur recta AD coniungens angulos ad centrum, & peripheriam, & producatur vſque ad E infra angulum ad centrum, & primò ADE cadat in eandem rectam lineam AB. Quoniam *a* angulus externus BDC duobus internis, & oppoſitis A & C eſt æqualis in triangulo ADC; ſuntque *b* anguli A & C inter ſe æquales, cùm latera DA & DC ſint æqualia, nempe radij circuli. Ergo angulus BDC duplex eſt anguli BAC ad peripheriam.

*a prop. 18. lib. 2.*

*q prop. 6. lib. 1*

Secundò cadat recta ADE intra angulum BDC. Et quoniam *c* in triangulo BAD externus angulus EDB æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis B & DAB, qui æquales ſunt inter ſe, vt prius dictum eſt. Pari ratione in triangulo DAC externus angulus EDC æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis C & DAC, qui pariter æquales ſunt inter ſe. Ergo totus angulus BDC æqualis eſt quatuor angulis B, DAB, DAC & C; ſed duo anguli B & C ſimul æquales ſunt duobus reliquis, ideſt angulo BAC. Ergo angulus BDC duplus eſt anguli BAC. Quod erat ſecundum.

*c prop. 18. lib. 2.*

Ter-

Tertiò cadat ADE extra angu-
lum BDC, & ſecet peripheriam in
E. Et quoniam d in triangulo CD
A iſoſcelio externus angulus EDC
æqualis eſt angulis DAC & DCA
inter ſe æqualibus, erit angulus E
DC, æqualis angulo DAC bis ſum-
pto. Rurſus quia in triangulo AD
B iſoſcelio externus angulus EDB
æqualis eſt angulis DAB & DBA
æqualibus, erit angulus EDB, æ-
qualis angulo DAB bis ſumpto. Si
ergo ab æqualibus angulis EDC &
DAC bis ſumpto tollantur æquales
anguli EDB & DAB bis accepto
erunt reſidui BDC & BAC bis
æquales inter ſe. Ergo angulus BD
C duplus eſt anguli BAC. Quod
erat oſtendendum.

d *prop. 18. lib. 1.*

PROPOSITIO XIV. *In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli inter ſe ſunt æquales. Et duo anguli æquales ſubtenſi ab eadem recta linea, ad eaſdem partes conſtituti, ſunt in eodem circuli ſegmento.* Tabula II. Fig. 38.39.40.

EVCL. 21. *illo.*

In circulo, cuius centrum E, exiſtant duo anguli A & B in ſeg-
mento DABC. Dico eos eſſe æ-
quales. Sit primò ſegmentum ſemi-
circulo maius; & à centro E con-
iungantur rectæ DE & CE. Quo-
niam a angulus E ad centrum duplus
eſt tam ipſius anguli A, quàm an-
guli

a *prop. 13. hu-*

guli B ad peripheriam; cùm omnes eandem peripheriã DC pro baſi habeant. Ergo anguli A & B inter ſe ſunt æquales.

Secundò ſit ſegmentum DABC, aut ſemicirculus, aut minor ſemicirculo; & coniungatur recta *AB*. Manifeſtum eſt ſegmentum ADH*B* maius eſſe ſemicirculo; & ideo (ex prima parte huius propoſitionis) duo anguli ADF & BCF in maiori ſegmento exiſtentes, æquales ſunt inter ſe: & ſunt *b* pariter duo anguli ad verticem BFC & AFD æquales inter ſe. Ergo *c* in triangulis ADF & B F C tertius angulus DAF æqualis erit reliquo angulo CBF.

b *Corol. prop. 5. lib. 1.*
c *ex pr. 18. lib. 1*

Tertiò ſint duo anguli ABC & ADC æquales inter ſe, ad eaſdem partes, ſubtenſi ab eadem recta AC; & eadem conſtructione qua in propoſitione prima huius libri vſi ſumus. Circulus deſcribatur, cuius peripheria tranſeat per puncta B C & A, cuius centrum ſit G. Oſtendendum modò eſt punctum D in eadem ſegmenti ABC peripheria reperiri, Si hoc verum non eſt, tranſeat, ſi fieri poteſt, per punctum O vltra vel citra D. Manifeſtum eſt duos angulos ABC & AOC in eodẽ ſegmento ABOC reperiri; *d* ideoque æquales eſſe inter ſe: erat autem ex hypotheſi angulus CDA æqua-

e *ex prima parte huius*

qualis eidem angulo B. Ergo duo anguli A D C & A O C æquales erunt inter ſe, externus interno, & oppoſitio in triangulo COD, quod *e* eſt abſurdum. Non ergo peripheria circuli ABC tranſit vltra, vel citra punctum D. Quare præciſè per D punctum tranſibit. Quod erat oſtendendum.

*e Corol. propos. 18. lib. 1*

PROPOSITIO XV. *Quadrilaterorum in circulo deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales. Et ſi in quadrilatero anguli oppoſiti duobus rectis æquales fuerint, circulus per quatuor puncta quadrilateri tranſibit*, Tabula II. Figura 41. 42.

EVCL. 22. III.

In circulo, cuius centrum E inſcriptum ſit quadrilaterum quodlibet ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC & ADC duobus rectis æquales eſſe. Ductis diametris quadrilateri AC & *BD*: erunt *a* anguli *ABD* & *ACD* in eodem ſegmento ABCD æquales inter ſe. Similiter erunt duo anguli CBD & CA D in eodem ſegmento CBAD æquales quoque inter ſe. Ergo duo anguli ABD & C B D, ideſt totus angulus ABC æqualis erit duobus angulis ACD & CAD ſimul. Ergo addito cõmuni angulo CDA, erunt in quadrilatero duo anguli oppoſiti ABC & CDA ſimul, æquales tribus

*a prop. 14. huius.*

angulis ACD CAD & CDA ſimul
b prop. ſumptis; ſed b hi tres vnius trian-
18. lib. 1 guli æquales ſunt duobus rectis.
Ergo duo oppoſiti ABC & CDA
duobus rectis æquales ſunt. Eodem
modo oſtendentur duo anguli op-
poſiti BAD & BCD duobus rectis
æquales. Patet ergo prima pars.

Secundò ſint in quadrilatero AB
CD anguli oppoſiti B & D duobus
rectis æquales; Dico circulum per
puncta A, B, C, D tranſire. Ducta
diametro CA circa triangulum AC
c ex pro. B, circulus deſcribatur; c quem
1. huius dico neceſſariò tranſire per punctum
D. Si enim hoc verum non eſt,
tranſeat, ſi fieri poteſt, per pun-
ctum E vltra, vel citra D; & con-
iungatur recta AE. Quoniam qua-
drilaterum ABCE circulo inſcribi-
tur: Ergo (ex prima parte huius)
duo anguli E & B, erunt duobus re-
ctis æquales: erant autem ex hypo-
theſi anguli B & D duobus rectis æ-
quales. Ergo hi duo illis duobus
æquales erunt; & ablato communi
angulo B, erit angulus E æqualis
angulo D, quod eſt falſum, & con-
tra coroll. 1. propoſ. 18. lib. 1. Non
ergo peripheria circuli tranſit per
punctum E vltra, vel citra D. Qua-
re per puncta A, B, C, D tranſibit.
Quod erat, &c.

PRO-

**PROPOSITIO XVI.** *In circulis æqualibus vel in eodem circulo anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti, inſiſtunt æqualibus peripherijs.* Tab. II. Fig. 43. EVCL. 26. III.

In circulis æqualibus, quorum centra G & H, ſint primò anguli ad centra G & DHF æquales. Dico peripherias AIC & DKF, (quæ ſunt eorum baſes) æquales eſſe inter ſe. Quoniam circuli æquales ſunt; Ergo a quatuor radij AG, CG, DH & FH ſunt æquales: Intelligatur circulus vnà cum trilineo ACG ſuperponi trilineo DHF, ita vt punctum G ſuper H, & recta AG ſuper HD cadat, & angulus G ſuper angulum H, cadent b neceſſariò duo puncta A & C ſuper D & F, propter æqualitatẽ angulorũ à radijs cõprehenſorũ, incident. His poſitis, neceſſe eſt peripheriam AIC cadere præcisè ſuper peripheriam DKF. Nam ſi caderet ſupra, vel infra, aut partim ſupra, partim infra ipſam, vt in DNF; tunc, ducta à centro H recta HKN, ſecante vtramque peripheriam in punctis K & N; quia HK æqualis eſt radio HD; pariterque HN æqualis eſt HD, quia c ſunt radij circulorum æqualium. Ergo HK & HN æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo peripheria AIC cadit ſupra, vel infra peripheriam

a *Axi. hnius.*

b *Axi. 9. lib. 1*

c *ax hu- ius*

DKF. Quare ſibi congruant neceſ ſe eſt; ideoque æquales erunt inte ſe. quod erat primo loco oſtendendum.

Sint ſecundò anguli ad peripheriam B & E æquales. Dico eos inſiſtere ſuper æquales peripherias A IC & DKF. Ducantur radij AG & GC, DH & HF. Quoniam angulus G ad centrum duplus eſt anguli B: pariterque angulus DHF æqualis eſt duplo anguli E; eſtque duplum anguli B æquale duplo anguli E. Ergo anguli G & DHF æquales ſunt inter ſe, & ſunt ad *centrum*; Ergo peripheriæ AIC & D KF æquales ſunt inter ſe (ex prima parte) non ſecus in vno circulo eadem oſtendentur. Quapropter ſi anguli B & E æquales fuerint, *&c.* Quod erat oſtendendum.

d *prop. 13. huius.*

*Corollarium.* Patet etiam angulos æquales ad centra duorum circulorum æqualium vnà cum peripherijs ſubtenſis comprehendere figuras æquales. Vocentur illæ *Sectores*.

Nam ex eo, quod anguli G & H ad centrum poſiti ſunt æquales inter ſe, oſtenſæ fuerunt figuræ GAIC & HDKF ſibi mutuò congruentes, & ideo æquales erunt. Quæ vocentur *Sectores*.

PRO-

PROPOSITIO XVII. *In circulis æqualibus vel in eodem circulo, anguli, qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti fuerint.* EVCL. 27. III.
Tabula II. Fig. 44.

In circulis æqualibus, quorum centra G & H, ſuper æquales peripherias AC&DF inſiſtant primò anguli H & AGC. Dico eos eſſe æquales. Si enim hoc verum non eſt. Sit angulus AGC maior, vel minor angulo DHF. Et fiat *a* angulus AGI æqualis angulo H. erunt *b* igitur peripheriæ AI & DF æquales inter ſe; erat autem peripheria AC æqualis eidem DF. Ergo peripheriæ AC & AI æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo anguli AGC & H inæquales ſunt. Ergo patet, &c. Inſiſtant deinde anguli ABC & E, ad peripherias conſtituti, baſibus AC & DF æqualibus. Dico eos angulos eſſe æquales. Quoniam propter æqualitatem peripheriarùm AC & DF anguli ad centra G & H æquales ſunt inter ſe (ex prima parte); hi verò dupli *c* ſunt angulorum ad peripherias B & E. Ergo B & E æquales ſunt inter ſe. Quod erat, &c.

*a prop. 24. lib. I*
*b prop. 16. hu.*
*c prop. 13. hu.*

*Corollarium* Conſtat etiam, quòd, ſi in eodem, vel æqualibus circulis,

vna peripheria aliquoties reliqua metiatur, atque ipſis inſiſtant anguli ad centrum, vel ſectores; minor angulus maiorem, & minor ſector maiorem æquè metietur, quemadmodum minor peripheria maiorem metitur.

Si enim peripheria CI aliquoties metiatur ipſam AC, verbi gratia quater, atque à punctis diuiſionum ad centrum coniungantur rectæ lineæ, erunt omnes *d* anguli, vel ſectores æquales tum inter ſe, cùm ipſi angulo, vel ſectori CGI, quandoquidem inſiſtunt peripherijs æqualibus. Et propterea angulus CGI toties metietur angulum AGC, vel ſector ſectorem, quoties peripheria CI metitur peripheriam AC.

*d prop. 15. hu. e ex pr. 6. huius*

EVCL. 28. & 29. III.

PROPOSITIO XVIII. *In circulis æqualibus vel in eodem circulo æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maior, minorem verò minor. Et æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt*. Tabula II. Fig. 45.

In circulis æqualibus, quorum centra G & H, ſint rectæ æquales AC & DF. Dico maiorem peripheriam ABC æqualem eſſe maiori DEF, & minorem AC æqualem minori DF. Ductis enim radijs AG, GC,

BC, DH & FH, erunt duo latera circa angulum G æqualia duobus lateribus circa angulum H, ſingula ſingulis, cùm ſint radij æqualium circulorum; ſuntque baſes AC & DF poſitæ æquales. Igitur *a* anguli G & H æquales erunt, & peripheriæ *b* AC & DF, quibus inſiſtunt, æquales quoque. Vnde reſiduæ circunferentiæ A B C & D E F, ex circulis æqualibus, æquales quoque erunt inter ſe. Quod erat primum. *a prop. 7. lib. 1.* *b prop. 16. hu.*

Sint ſecundò peripheriæ ABC & DEF æquales, ſiue peripheriæ AC & DF æquales. Dico rectas AC & DF æquales eſſe. Facta eadem conſtructione; quoniam peripheriæ AC & DF æquales ſunt: Ergo *c* anguli inſiſtentes G & H æquales erunt; ſuntque latera circa angulos G & H æqualia ( cùm ſint radij circulorum æqualium ). Ergo *d* baſes AC & DF æquales erunt. Quod erat ſecundum. Quapropter, &c. *c prop. 17. hu.* *d prop. 4. lib. 1.*

PROPOSITIO XIX. *Datam circuli peripheriam bifariam ſecare.* Tabula II. Fig. 46. EVCL. 30. III.

Sit BEC circuli peripheria cuius centrum A. Debet ſecari in duas æquales partes. Coniungantur radij AB AC; & bifariam ſecetur angulus BAC à recta AE. Quia duo anguli ad centrum BAE & EAC æ-

quales interſe in eodem circulo c
a prop. 16. lib. cti ſunt ergo peripheriæ a BE &
C quibus inſiſtunt æquales ſunt i
terſe.

EVCL. 31. III. PROPOSITIO XX. *In ſemicircul angulus rectus eſt; qui autem in maiori ſegmento acutus, qui verò in minori ſegmento obtuſus eſt. Et circa angulum rectum circuli ſegmentum eſt ſemicirculus, & circa acutum angulum maius ſegmentum eſt, & circa obtuſum eſt ſegmentum minus* Tabula II. Fig. 47. 48. 49.

In circuli portione ABC ſit angulus ABC. Dico eum eſſe rectum in ſemicirculo; acutum in maiori; & obtuſum in minori ſegmento. Ducatur in ſemicirculo radius DB; & in reliquis ſegmentis diameter AE, & recta EC. In ſemicirculo quoniā in triangulo ADB duo latera AD & BD ęqualia ſunt, cū ſint radij circuli: a prop. 6. lib. 1. Ergo a anguli DAB & DBA æquales ſunt inter ſe. Eadem ratione in triangulo BDC duo anguli DCB & DBC æquales erunt. Ergo duo anguli BAD & BCD, ſimul, æquales ſunt duobus angulis ABD & CBD, ideſt integro angulo ABC; b Prop. 18. lib. 1 ſuntque b tres anguli trianguli ABC æquales duobus rectis. Ergo angulus ABC ſemiſſis erit duorum rectorum. ideoque rectus erit. At in alijs portionibus quia AE eſt diame-

meter erit in ſemicirculo angulus A CE rectus (ex prima parte): Ergo *c* ABC acutus erit; eſtque *d* angulus B æqualis angulo E, cùm ſint in eodem ſegmento. Ergo angulus AB C acutus erit in maiori ſegmento. Sed in portione minori ſunt *e* duo anguli oppoſiti E & B, in quadrilatero ABCE, circulo inſcripto, æquales duobus rectis. Ergo *f* angulus B obtuſus erit.

*c* ex Pr. 18. lib. 1

*d* Prop. 14. hu.

*e* prop. 15. hu.

*f* prop. 12. lib. 1

Secundò ſit angulus ABC rectus, conſtitutus in ſegmento ABC. Dico eum eſſe ſemicirculum. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit ſegmentum maius, aut minus; ideoque angulus ABC erit obtuſus, vel acutus (ex ſecunda, & tertia parte huius) quod eſt contra hypotheſin. Non ergo ſegmentum eſt maius. Vnde ſemicirculus erit.

Tertiò ſit angulus B acutus. Dico ſegmentum ABC minus eſſe. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit, aut ſemicirculus, aut ſegmentum minus, ideoque angulus B erit aut rectus, aut obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo, &c.

Quartò ſit angulus B obtuſus. Dico ſegmentum ABC minus eſſe. Nam ſi hoc verum non eſt, erit ſemicirculus, aut ſegmentum maius. ideoque angulus B erit rectus, vel acutus, quod repugnat hypotheſi. Quaproter &c.

EVCL. 16. III. PROPOSITIO XXI. *In circulo recta linea, perpendiculariter ad diametrum ab eius extremitate erecta, extra circulum cadet, & in locum inter ipſam rectam lineam tangentem & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet.* Tabula III. Fig. 1.

In circulo ABH, cuius diameter AB, ab eius extremo puncto A ducatur *a* CAD perpendicularis ad rectam lineam AB. Dico CAD cadere extra circulum; atque in locum à tangente DA & peripheria comprehenſum, rectam lineam duci non poſſe. Ducatur à puncto quolibet E, ſumpto in recta linea AD ad alterum extremum diametri B, recta linea EB, ſecans peripheriam in H. Et quoniam *b* rectarum BA, BH in circulo ductarum, maxima eſt diameter BA. Ergo recta linea BA maior eſt, quàm BH. Et quia in triangulo BAE rectus eſt angulus BAE. Ergo *c* reliquus angulus AEB eſt acutus, & ideo minor recto. Quare *d* latus BE, ſubtendens maiorem angulum, maius erit latere BA; erat autem BA maior, quàm BH. Igitur BE maior erit, quàm BH; eſtque punctum H in circuli peripheria. Ergo punctum E extra circulum cadit; & ſic quodlibet aliud præter punctum A. Igitur tota recta linea AD extra circulum cadit.

*a prop. 10. lib. 1.*

*b prop. 11. hu.*

*c Corol. prop. 18. lib. 1.*

*d Prop. 20. lib. 1.*

Po-

Poſtea à puncto A contactus ducatur quælibet recta linea AG infra tangentem; & fiat *e* angulus ABH æqualis angulo DAG. Quia duo anguli ABH & DAG ſunt æquales, addito communi angulo BAH; duobus angulis BAG & GAD, qui rectum angulum BAD conſtituunt, æquales erunt duo anguli HBA & BAH ſimul ſumpti. Quare hi duo æquales ſunt vni recto angulo; & ideo *f* conueniunt rectæ lineæ BH, AH, & *g* efficiunt reliquum angulum AHB rectum, *h* qui in ſemicirculo erit; & ideo recta GA circulum ſecat in punctis H & A. propterea recta linea HA intra circulum cadit. eadem ratione quælibet alia recta linea, infra tangentem ad punctum A ducta, neceſſariò circulum ſecabit. Quare duci non poteſt recta linea in locum à tangente, & peripheria comprehenſum. Quod erat, &c.

*e prop. 24. lib. 1.*

*f prop. 26. lib. 1.*

*g Corol. prop. 20 huius.*

*h prop. 20. hu.*

PROPOSITIO XXII. *A dato puncto, extra circulum poſito, rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat.* Tabula III. Fig. 2.

EVCL. 17. III.

Ex puncto externo A ducenda eſt recta linea, tangens circulum BC; cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum in E; ſuperquam deſcribatur ſemicirculus DCA, ſecans illius circunferentiam in C; &

guli GFC & GCF vni recto æquales erunt, ideſt ſunt æquales angulo e recto ACF. Ergo ablato communi angulo GCF, erit angulus ACG æqualis angulo CFG in alterno ſegmento. Poſtea f quoniam in quadrilatero CDGF duo anguli oppoſiti D & F duobus rectis *æquales* ſunt; pariterque g duo anguli ACG & BCG duobus rectis æquales: erant autem anguli ACG & CFG inter ſe æquales. Ergo reſidui anguli BCG & D æquales inter ſe erunt.

*e prop. 23. hu.*

*f prop. 15. hu.*

*g prop. 11. lib. 1*

Tertiò ab eodem puncto C peripheriæ CDE ducantur rectæ, *CD* quidem ſecans circulum, & AB in eum incidens; ſitque angulus ACD æqualis angulo E, in alterno ſegmento. Dico AB circulum contingere. Quoniam, ſi hoc verum *non* eſt, ducatur *h* GH, tangens circulum in C. Ergo *i* angulus GCD æqualis erit angulo E in alterno ſegmento: erat autem angulus ACD æqualis eidem angulo E. Ergo anguli ACD & GCD æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alia recta GH circulum tanget. Quare AB ſolummodo tangens erit. Quapropter, &c.

*h ex pr. 21. hu.*

*i ex prima par te huius*

PRO-

PROPOSITIO XXV. *Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo.* Tab. III. Fig. 7.8.9. EVCL. 33.III.

Super data recta AB, deſcribendum eſt ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo C. *a* Fiat angulus DAB æqualis angulo C; & ſi AB perpendicularis eſt ſuper AD, *b* ſecetur illa bifariam in E: Si verò non eſt perpendicularis, *c* excitetur AE perpendicularis ſuper AD, erit angulus EAB acutus, eo quod eſt differentia anguli BAD à recto; & fiat *d* angulus ABE æqualis angulo BAE acuto. Concurrent *e* ergo AE & BE in puncto E, & *f* erunt æquales inter ſe. Ergo circulus, centro E, interuallo EA deſcriptus, tranſibit per B, & *g* ipſum tanget recta DA, cum perpendicularis ſit ad radium AE. Ducantur à quolibet puncto G, ſegmenti AGB, duæ rectæ GA & GB. Oſtendendum eſt angulum AGB, in dicto ſegmento conſtitutum, æqualem eſſe dato angulo C. Quoniam *h* angulo DAB à tangente, & ſecante comprehenſo æqualis eſt angulus G, in alterno ſegmento; ſed eidem angulo DAB æqualis erat angulus C. Ergo anguli G & C æquales inter ſe ſunt. Deſcripſimus ergo ſegmentum AGB, in quo angulus G æqualis eſt dato angulo C, quod erat, &c.

*a pr. 23 lib. 1.*
*b prop. 9. lib. 1*
*c prop. 10. lib. 1.*
*d prop. 24. lib. 1.*
*e prop. 29. lib. 1.*
*f prop. 20. lib. 1.*
*g ex pr. 21. hu.*
*h prop. 24. hu.*

PRO-

EVCL. 34. III. PROPOSITIO XXVI. *A dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum æqualem dato angulo.* Tabula III. Fig. 10.

Sit datus angulus D, & circulus ABC, à quo abſcindi debet ſegmentum, quod capiat angulum æqualem angulo D. Ducatur *a* EG, tangens circulum in A; Fiat *b* poſtea angulus EAB æqualis angulo D; & à quolibet puncto C, peripheriæ ACB, duæ rectæ CA & CB ducantur. Oſtendendum eſt angulum C æqualem eſſe angulo D. Quoniam *c* angulo EAB æqualis eſt angulus C in alterno ſegmento: eſtque eidem angulo EAB ex conſtructione, æqualis angulus D. Ergo angulus C æqualis eſt angulo D. Secuimus ergo ſegmentum ACB, in quo angulus C æqualis eſt dato angulo D. Quod erat faciendum, &c.

*a ex pr. 21. hu.* *b prop. 24. lib. I.* *c prop. 24. hu.*

EVCL. 1, X. PROPOSIT. XXVII. *Si fuerint duæ lineæ inæquales, & ex maiore auferatur eius ſemiſſis, & à reſiduo rurſus tollatur eius ſemiſſis, & hoc repetatur ſemper: relinquentur tandem aliqua linea, quæ minor erit propoſita minore linea.* Tabula III. Figura 11.

Sint duæ lineæ, AB maior, & C minor. Dico, ſi ex maiore, atque ex eius reſiduis ſemper medietates tollantur, relinqui tandem lineam mino-

minorem, quàm C. Multiplicetur C toties, quouſque efficiatur DH maior, quàm AB; & diſtribuatur DH in ſuas partes DE, EF, FG & GH æquales ipſi C. Poſtea ex a AB tollatur eius ſemiſſis AK, & à reliqua KB tollatur pariter eius ſemiſſis KM, & hoc ſemper repetatur, quouſque portiones AK, KM, MN & NB, in ipſa AB ſectæ, totidem ſint, quot ſunt partes alterius DH; quod fieri poſſe certum eſt, cùm continuum ſemper diuidi poſſit. Oſtendendum eſt poſtremam portionem NB minorem eſſe ipſa C. Quoniam ex minore AB tollitur eius dimidium AK, & ex maiori DH tollitur DE minus, quàm eius dimidium: erit reliqua KB minor, quàm reliqua EH. Et quia rurſus ex minore KB tollitur eius dimidiũ KM; at ex maiore EH tollitur EF non maior, quàm dimidium eius. Ergo reſidua MB minor erit, quàm reſidua FH. Tandem ex minore MB tollitur eius dimidium MN; at ex maiore FH tollitur FG non maior, quàm dimidium eius, & ſic ſemper. Ergo tandem poſtremum reſiduum NB minus erit, quàm GH, ſeu C, quod illi æquale eſt. Quare patet propoſitum.

a *prop. 9. lib. 1*

*Corollarium* Patet, quòd, ſi ex maiore AB tollatur AK magis, quàm eius

eius dimidium, & ex reſidua KB rurſus tollatur magis, quam eius dimidium, & hoc ſemper repetatur, tandem relinquetur aliqua linea, quæ minor erit quacunque propoſita linea C.

PROPOSITIO XXVIII. *In triangulo iſoſcelio rectangulo differentia lateris & hipothenuſæ minor eſt medietate lateris; & differentia huius ſegmenti à lateris reſiduo minor eſt medietate præcedentis differentiæ; & ſic ſemper continuari poteſt talis differentiarum abſciſſio, quouſque poſtremum ſegmentum minus ſit quacunque data recta linea.* Tabula III. Fig. 12.

Sit triangulum iſoſcelium ABC, rectangulum in B, & quelibet recta linea D, cuiuſcunque paruitatis. Dico differentiam AC & BC minorem eſſe medietate ipſius AB. Di-
a prop. 8. lib. 1 — uidatur *a* bifariam angulus ACB à recta linea CF, quæ ſecet rectam
b prop. 11. lib. 1. — AB in F; atque *b* à puncto F ducatur FE perpendicularis ad AC, ſecans eam in E; extendaturque *c* re-
c Corol. prop. 16 lib. 1. — cta FG parallela ipſi AC, ſecans B C in G. Et quoniam propter *d* pa-
d prop. 15. lib. 1 — rallelas eſt angulus BGF æqualis angulo C; atque angulus BFG æ-
e prop. 6 lib. 1. — qualis angulo A, ſuntque *e* anguli A & C æquales ad baſim iſoſcelij A BC. Ergo etiam anguli BFG &

BGF

BGF æquales ſunt, ideoque *f* latera BG, BF æqualia ſunt, & triangulum BFG eſt iſoſceles. Poſtea quia in triangulis CEF & CBF, angulus BCF, æqualis eſt angulo ECF, & duo anguli recti B & E æquales ſunt, & latus CF eſt commune, oppoſitum angulis rectis B & E; Ergo *g* CB æqualis eſt CE, atque BF æqualis eſt EF. Cùmque in triangulis FBG & FEA ſint duo anguli B & E recti, & anguli BGF & A æquales, quibus opponuntur latera æqualia FB & FE. Igitur *h* AF æqualis eſt FG, atque AE æqualis ipſi GB, ſeu ei æquali FB. Eſtque in triangulo AEF latus AF (ſubtendens rectum, & *i* ideo maximum angulum AEF) maius, quàm AE. Igitur AF maius eſt, quàm FB. Quare minus ſegmentum BF æquale eſt ipſi EA, differentiæ lateris BC, & hypothenuſæ AC eiuſdem trianguli ABC.

*f prop. 20. lib. 1*

*g prop. 25. lib. 1.*

*h prop. 25. lib. 1.*

*i prop. 20. lib. 1.*

Dico Secundò differentiam ſegmentorum AF, & FB minorem eſſe medietate ipſius FB. & ſic ſemper *l* ducta recta GK, ſecante angulum G bifariã, & ducta *m* KH perpendiculari ad FG, ſecante eam in H, erit vt prius minus ſegmentum KB æquale FH, differentiæ ipſarum BG & GF; eſtque BG æqualis BF & FG æqualis AF. Ergo KB, minus ſegmentum totius FB, æquale eſt differen-

*l prop. 8 lib. 1.*

*m prop. 11. lib. 1*

tiæ præcedentium ſegmentorum A F & FB. Et quoniam continuum ſemper diuiſibile eſt, poterit denuò ſecari KB in O, vt BO ſit minus ſegmentum, & ſit æquale differentiæ ipſarum FK, KB & ſic ſemper. Cumque ſint duæ rectæ lineæ AB & D, & ex maiori AB auferatur maius ſegmentum, ideſt magis, quàm eius dimidium; & ex reſiduo FB auferatur FK magis, quàm eius dimidium; atque ex KB tollatur KO magis, quàm eius dimidium; & ſic ſemper. Ergo *n* poſtremum ſegmentum OB minus erit quacunque data recta linea D, & omnia minora ſegmenta ablata, ſunt differentiæ præcedentium ſegmentorum. Quod erat propoſitum.

*n Corol. 1. prop. 27. hu.*

EVCL. 116. X.

PROPOSITIO XXIX. *Nulla recta linea, quæ metitur latus quadrati, menſurare poteſt diametrum eius. Vocentur latus, & diameter quadrati, recta linea* incommenſurabiles *inter ſe*. Tab. III. Fig. 13.

Sit quadratum ABCD, cuius diameter DB, & recta linea R menſuret latus AB ipſius quadrati AC; ſitque R qualibet ex innumerabilibus rectis lineis, quæ metiri poſſunt ipſam AB. Dico rectam R nunquam menſurare diametrum BD. Si enim hoc verum non eſt, menſuret etiam recta R diametrum BD. Et

quia

quia *a* in quadrato AC angulus A rectus eſt; & duo latera DA & AB ſunt æqualia, erit triangulum BAD iſoſcelium, rectangulum. Quare facta *b* BE æquali ipſi AB ſecari *c* poteſt latus AB in F, vt ſit minus ſegmentum AF æquale DE, differentiæ duarum AB & DB: pariterque, facta FG æquali AF, ſecari poteſt AF in H, vt ſit minus ſegmentum AH æquale GB, differentiæ ipſarum AF & FB; & facta HK æquali AH, denuo ſecari poteſt AH in O, vt ſit ſegmentum AO æquale KF; differentiæ ipſarum AH & HF, & hoc ſemper fieri poteſt, quouſque poſtremum ſegmentum, quod ſit AO minus ſit quacunque data recta R. Et quoniam ponitur recta R menſura ipſius AB, atque alterius DB; eſtque EB æqualis AB. Ergo recta R menſurat totam DB, & ablatam BE. Quare *d* recta R menſurabit quoque reſiduam differentiam DE: eſtque AF æqualis ipſi DE. Igitur R metitur ipſam AF; menſurabat autem prius totam AB. Ergo *e* eadem R menſurabit Reſiduam FB, atque ipſam AF; & ideo etiam earum differentiam GB, ſeu AH (huic æqualem) menſurabit; ſed etiam AF metiebatur eadem R. Igitur menſurabit quoque reſiduam HF; atque menſurabat pariter ipſam AH. Quare R metitur earum

a prop. 34. lib. 1.
b prop. 3. lib. 1.
c prop. 28. hu.
d ax. 6. lib. 1.
e Ax. 6 lib. 1.

dif-

differentiam KF; & ideo ei æqualem AO. Et propterea *f* recta R æqualis, aut minor erit, quàm AO (maior enim non poteſt menſurare minorem); quod eſt impoſſibile. Facta enim fuit recta AO minor, quàm R. Non ergo reperiri poteſt aliqua recta R, quantulacunque illa ſit, quæ metiatur diametrum BD, & latus AB, eiuſdem quadrati AC, quod, &c. vocentur rectæ lineæ AB & DB inter ſe Incommenſurabiles.

*f Def. 13. lib. 1*

PROPOSITIO XXX. *Si fuerint duæ rectæ lineæ incommenſurabiles; erunt ſpatia parallelogramma, vel triangula ſuper ipſas deſcripta, æquè alta inter ſe, incommenſurabilia.* Tabula III. Fig. 14. 15.

Sint duæ rectæ lineæ AB & BC incommenſurabiles, quæ ſint baſes, eiuſdem altitudinis parallelogrammorum R & S, vel triangulorum. Dico parallelogramma, vel triangula R & S inter ſe eſſe incommenſurabilia. Si enim hoc verum non eſt, habeant ſpatia R & S aliquam communem menſuram, ſi fieri poteſt, quæ ponatur eſſe X, & quoties X metitur ſpatium R, in *a* tot partes inter ſe æquales AG, GH, HK, KB diſtribuatur recta linea AB: & quoties X metitur ſpatium S, in tot partes æquales BM, MO, OC diſtribua-

*a prop. 31. lib. 1*

…atur recta BC, & à punctis G, H, K, M, O b ducantur parallelæ, efficientes parallelogramma in primo caſu, aut conuenientes in eodem puncto D, efficientes triangula, vt in ſecundo caſu: erunt c parallelogramma AGD, GHD, HKD, KB… inter ſe, aut triangula d æqualia; … quod baſes eorum ſunt æquales, … inter eaſdem parallelas exiſtunt. Et ſimiliter erunt parallelogramma …OD, OMD, MBD inter ſe, aut triangula æqualia inter ſe. Et quoniam X toties menſurat ſpatium …, quoties KB menſurat baſim BA; … quoties KB menſurat baſim BA, … oties ſpatium KBD menſurat ſpatium R (comparando ſemper parallelogramma inter ſe, aut triangula inter ſe.) Ergo X & ſpatium KBD æquè metiuntur ſpatium R; ideoq; ſpatium X & KBD æqualia inter ſe ſunt, cùm ſint æqualia cuilibet parti earum, in quæ reſoluitur ſpatium R. Eadem ratione ſpatium MBD æquale erit ſpatio X. Quare duo ſpatia KBD & MBD æqualia erunt inter ſe, cum ſint æqualia ipſi X; & ſunt eiuſdem altitudinis. Ergo eorum baſes KB & BM æquales ſunt inter ſe (nam ſi inæquales eſſent, pariter e parallelogramma, vel f triangula KBD & MBD inæqualia eſſent, quod eſt conrra hypotheſin;) ſed KB metitur AB & BM menſurat

b ex pr. 16. lib. 1.

c pr. 31. lib. 1.

d prop. 32. lib. 1.

e ex pr. 31. lib. 1

f ex pr. 32. lib. 1.

ipſam

ipſam BC. Ergo duæ rectæ AB & BC inter ſe commenſurabiles ſunt; cùm ab æqualibus KB & BM, ſeù eadem KB menſurentur, quod eſt contra hypotheſin. Poſitæ enim fuerunt AB & BC incommenſurabiles. Non ergo ſpatia R & S habere poſſunt aliquam communem menſuram; ideoque incommenſurabilia ſunt. Quod erat propoſitum.

## SCHOLIVM.

Sicuti oſtenſum eſt lineas rectas & ſpatia, triangula, vel parallelogramma eſſe poſſe incommenſurabilia, ita oſtendemus poſtea omnes quantitates continuas, eiuſdem generis, incommenſurabiles inter ſe eſſe poſſe. Debent tamen ex hac ſerie excludi Numeri; eo quod in numeris diuidendo poteſt deueniri ad minimum in eius genere, ſcilicet ad vnitatem; hoc autem in quantitate continua minimè locum habet, quia ſemper diuiſibilis eſt; & ſic non datur minimum in eius genere, quod poſſit eſſe menſura communis duarum quantitatum continuarum.

*Finis Libri ſecundi.*

# LIBER III.

## *De comparationibus quātitatum.*

EVCL. *lib.* V.

## DEFINITIONES.

I. PARS *dicitur minor quantitas maioris quantitatis, cùm minor aliquoties metitur maiorem.*

II. MVLTIPLEX *autem dicitur maior quantitas minoris quantitatis, cùm maior à minore menſuratur.*

III. PARTES *dicitur quantitas maior, ſiue minor, alterius quantitatis, cùm reperiri poteſt tertia quantitas, quæ illarum ſit communis menſura.* Tabula III. Fig. 16. 17. 18.

Duarum quantitatum eiuſdem generis, ſi prima A metitur ſecundam B, vocabo primam A partem ſecundæ B denominatam à numero partium contentarum in B, veluti vna tertia, vna quarta pars, &c. & ſi prima A menſuratur à ſecunda B vocabo A multiplicem ipſius, vt duplā triplam &c. At ſi prima & ſecunda B menſurentur ab aliquibus C & C, Vocabo A partes ipſius B quarum numerus indicatur à prima A, nomen à ſecunda B, vt tres quartæ, quatuor quintæ ipſius B &c.

IV. EADEM *pars dicitur prima quantitas ſecundæ, ac eſt tertia quartæ quantitatis; cùm prima toties ſecundam metitur, quoties tertia quartam.*

V. *ET æquè multiplex dicitur prima quãtitas ſecundæ, vt eſt tertia quartæ; cùm prima, & tertia æquè menſurantur à ſecunda, & quarta.*

VI. *EAEDEM partes dicitur prima quantitas ſecundæ, quemadmodum eſt tertia partes quartæ quantitatis, cùm duæ quælibet quantitates æquè metiuntur primam, & tertiam; pariterque æquè menſurent ſecundam, & quartam.* Tab. III. Fig. 19. 20. 21

Quatuor quantitatũ (ſiue duæ primæ fuerint eiuſdem generis cum ſecundis ſiue non) ſi prima A toties metitur ſecundam B, quoties tertia C menſurat quartam D. Dicam primam ipſius ſecundæ, pariterque tertia quartæ eandem partem eſſe. Et ſi A toties menſuretur à B, quoties C menſuratur à D, vocabo antecedentes A & C æquemultiplices conſequentium B & D. Verum ſi A & C æquè menſurantur à duabus G & H, quæ pariter æquè metiantur conſequentes B & D. Dicam A ipſius B, atque C alterius D eaſdem partes eſſe.

VII. *SI antecedens quantitas fuerit multiplex, aut pars, parteſue conſequentis, vocetur* Comparatio *primæ cum ſecunda Proportio commenſurabilis; diceturque prima ad ſecundam, proportionem menſurabilem habere. At ſi nulla alia quantitas reperiri poteſt quæ ſit ambarum communis menſura;*

di-

*dicetur antecedens ad conſequentem habere proportionem incommenſurabilem.*

*SI quatuor quantitatum (eiuſdem generis, ſiue non) prima ipſius ſecundæ, & tertia quartæ æquè multiplices fuerint, vel eadem pars, aut eadem partes: vocetur* commenſurabilis proportio *quantitatis primæ ad ſecundam eadem, vel ſimilis proportioni quantitatis tertiæ ad quartam; & huiuſmodi quatuor quãtitates, vocentur* Proportionales commenſurabiles. Tab.III.F.22. VIII.

*SI verò quantitas prima maior fuerit quam vt eædem partes ſit ſecunda ac eſt tertia quantitas ipſius quarta, vocetur* Proportio quantitatis *primæ ad ſecundam maior commenſurabili proportione quantitatis tertiæ ad quartam. Et ſi prima minor fuerit quantitate illa, quæ ipſius ſecundæ eadem partes eſt, quam tertia ipſius quartæ: vocetur* Proportio quantitatis *primæ ad ſecundam minor proportione commenſurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem.* Tab. III. Fig. 23. IX.

Si fuerint quatuor quantitates A, B, C, D: & C ſit quælibet partes, ipſius D. v.g. C ſit tres partes quartæ ipſius D; at A ſit maior, quam tres quartæ ipſius B; ita vt alia E minor quam A ſit præciſè, vt C ad D. Tunc voco proportionem A ad

B maiorem proportione commenſurabili quam habet C ad D.

Et ſi A minor ſit quàm opus eſt, vt ad B eandem commenſurabilem rationem habeat, quam C ad D. Tunc proportio A ad B minor erit commenſurabili ratione quam *habet* C ad D.

X. *ET voco vnam proportionem maiorem alia incommenſurabili proportione; quando prima proportio eſt maior, at ſecunda eſt minor aliqua commenſurabili ratione.*

XI. *ET è contra (iiſdem poſitis) ſecunda proportio incommenſurabilis erit minor prima.* Tab III. Fig. 24. 25.

Sit C incommenſurabilis ipſi D; ſi verum eſt quod ex infinitis proportionibus commenſurabilibus aliqua reperiri poteſt qualis eſt E *ad* F reſpectu cuius proportio A ad B ſit maior; & proportio C ad D ſit minor eadem ratione E ad F; vt ſi v. g. E ſit quatuor tertiæ partes ipſius F, & verum eſt quod A maior eſt 4 tertijs ipſius B, ſed C eſt minor 4 tertijs alterius D. Tunc voco proportionem A ad B maiorem incommenſurabili proportione, quam habet C ad D, Et ſi concedatur, quod proportio A ad B maior ſit proportione incommenſurabili C ad D, ex vi definitionis neceſſariò proportio aliqua commenſurabilis reperietur, vt E ad F ſcilicet 7. ad 9. v. g. reſpe-

ſpectu cuius proportio A ad B ſit maior & C ad D minor; ideoque A erit maior quam 7 nonæ partes ipſius B & C minor erit quam 7 nonæ partes alterius D.

Hinc ſequitur dari poſſe quantitatem minorem ipſa prima A qualis eſt v. g. G quæ erit 7 nonæ partes ipſius B; pariterq; dabitur aliqua quãtitas non minor quam C quæ 7 partes nonæ ſit alterius D qualis eſt H.

Idemque dici poteſt de minori proportione incommenſurabili.

*AT in eiſdem incommenſurabilibus quatuor quantitatibus ſi proportio quantitatis primæ ad ſecundam non fuerit maior, neque minor ea proportione incommenſurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem: vocetur* incommenſurabilis proportio *quantitatis primæ ad ſecundam eadem, vel ſimilis proportioni, quam tertia habet ad quartam quantitatem. Et huiuſmodi quatuor quantitates vocentur* proportionales incommenſurabiles. Tab. III. Figura 26. XII.

Poſitis eiſdem quantitatibus A, B, C, D, & ſint A ipſi B, nec non C ipſi D incommenſurabiles. Si proportio ipſius A ad B non eſt maior, neque minor ea proportione incommenſurabili, quam C habet ad D: ideſt ſi fuerit impoſſibile dari rationem aliquam commenſurabilem in-

ter infinitas, quæ aſſignari poſſunt qualis eſt E ad F, vt proportio A ad B maior ſit, at proportio C ad D ſit minor eadem commenſurabili ratione E ad F. Pariterque proportio A ad B minor non ſit, & C ad D maior aliqua commenſurabili proportione E ad F. Vocabitur proportio incommenſurabilis primæ A ad ſecundam B, eadem, vel ſimilis proportioni quantitatis tertiæ C ad quartam D. Et huiuſmodi quàtuor quantitates A, B, C, D dicentur proportionales incommenſurabiles.

## AXIOMATA.

I. *Si prima quantitas ſecundam metiatur, ſecunda verò tertiam menſuret; prima quoq; tertiam metietur.* T. III. F. 27.

Vt ſi quantitas A menſuret ſecundam BC & BC menſuret tertiam DE. Manifeſtum eſt primam A menſurare quoque tertiam DE. Nam diuiſa DE in partes DF, FG, GE, quæ ſingulæ æquales ſint ipſi BC; cùm A menſuret ipſam BC, menſurabit quoque eadem A ſingulas partes DF, FG, GE; ideoque a ipſa A totam DE ex dictis partibus conſtantem menſurabit.

a *Axi.* 6. *lib.* 1.

II. *TRIBVS quantitatibus propoſitis, quam proportionem habet prima ad ſecundam, habebit tertia ad aliquam aliam quantitatem eiuſdem generis.*

III. *ET quam proportionem habet prima ad*

*ad ſecundam, habebit aliqua alia quantitas eiuſdem generis ad tertiam.* Tabula III. Fig. 28.

Vt, ſi data ſit aliqua proportio quantitatis A ad B. Manifeſtum eſt tertiam quantitatem C habere ad aliquam aliam quantitatem eiuſdem generis D eandem proportionem, quam A habet ad B. Licet enim ignoretur interdum quænam ſit illa quantitas quarta, certum eſt eam reperiri in natura. Nam cuiuſlibet datæ quantitatis C datur quoque quælibet multiplex aut partes eius. At ſi proportio A ad B eſt incommenſurabilis, vt eſt illa quam habet latus ad diametrum quadrati, ſuppoſito quod C ſit latus alicuius quadrati dari poterit diameter eiuſdem, quæ ſit D.

*SI duarum quantitatum æqualium vna partes fuerit alicuius tertiæ: & altera quoq; eadem partes erit eiuſdem tertiæ ac erat prima.* T. III. F. 29. *IV.*

*DVAE proportiones in tribus pauciſſimis terminis contineri, aut continuari poſſunt: ſi nimirum vnus ſit conſequens, aut antecedens communis; vel ſi vnus ſit antecedens vnius proportionis, & conſequens alterius.* Tab. III. Fig. 30. *V.*

*SI quatuor quantitatum prima maior fuerit, quàm ſecunda, ſed tertia non ſit maior, quàm quarta: habebit prima ad ſecundam maiorem pro-* *VI.*

*portionem, quàm tertia habet ad quartam*. Tab. III. Fig. 31.

Nam, exiſtente A maiore, quàm B; C verò non maiore ipſa D, proportio a quantitatis primæ ad ſecundam maior erit commenſurabili proportione æqualitatis; cùm prima A maior ſit ſecunda B: at proportio tertiæ C ad quartam D non erit maior eadem commenſurabili proportione æqualitatis; cùm tertia ponatur non maior quarta. Vnde patet (ex definitione decima) A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D.

a def. 9. huius.

PROPOSITIO I. *Si duæ quantitates duarum quantitatum fuerint æquè multiplices, erunt viciſſim vnà æquales, aut vnà maiores, aut minores*. Tabula III. Figura 32.

Sint quatuor quantitates, ſiue magnitudines, ſiue numeri AB, E, CD & F, omnes eiuſdem generis, & ſit AB tam multiplex ipſius E, quam CD eſt multiplex alterius F; ſitque primò E æqualis F. Dico AB ipſi CD æqualem eſſe. Intelligantur AB & CD diuiſæ in ſuas partes. Manifeſtum a eſt tot partes AG, GH & HB contineri in AB, ſingulæ æquales ipſi E, quot partes CI, IK & KD continentur in CD, ſingulæ æquales eidem F. Ergo AG & CI cum ſint æquales æqualibus

a Def. 5 huius.

E &

E & F, inter ſe quoque æquales erunt, pariterque GH, IK, nec non HB & KD æquales erunt inter ſe. Iam ſi æqualibus AG, CI addantur æquales GH, IK: erunt *b* totæ AH & CK æquales inter ſe; Et ſi eiſdem rurſus æquales HB & KD addantur, erunt totæ AB & CD æquales inter ſe. Quare quando E æqualis eſt F: etiam AB æqualis eſt ipſi CD. b *Axi. 2. lib. 1.*

Sit ſecundò E maior, quam F. Dico AB maiorem eſſe, quam CD. Diuiſis æquè multiplicibus, vt prius: erit AG maior, quam CI, eo quod illa maiori E, hæc verò minori F æqualis eſt. Pari ratione GH maior erit, quam IK & HB maior, quàm KD. Iam, ſi maiori AG maior GH addatur, & minori CI minor IK coniungatur, & rurſus eiſdem eodem ordine aliæ partes inæquales ſuperaddantur, erit tota AB maior, quàm CD.

Tertio ſit E minor, quàm F. Dico AB minorem eſſe, quàm CD. Quia E minor eſt, quàm F. Ergo F maior erit, quàm E; ideoque *c* CD etiam maior erit quàm AB. c *ex prima parte.*

Quartò ſit AB æqualis CD. Dico E æqualem eſſe ipſi F. Si hoc verum non eſt: erit E maior, aut minor, quàm F. Ergo, ex ſecunda, & tertia parte huius, AB maior, aut minor erit, quàm CD, quod eſt

 con-

contra hypotheſin. Ergo E ipſi F æqualis eſt.

Quintò ſit AB maior, quàm CD: Dico E maiorem eſſe, quàm F. Sin minus, erit E æqualis, aut minor, quàm F. Vnde, ex prima, & tertia parte huius, AB æqualis erit, aut minor quàm CD, quod eſt contra hypotheſin. Quare E maior eſt, quàm F. Vnde patet propoſitum.

*Corollarium* Patet, quòd ſi duæ quantitates fuerint duarum quantitatum eædem partes, erunt viciſſim vnà maiores, aut vnà minores, vel vnà æquales. Tab. III. Fig. 33.

Nam, ſi ponantur M & N æquè multiplices earundem E & F: erunt *d* AB ipſius M, atque CD ipſius N eædem partes; & ſicuti *e* E maior, vel minor, aut æqualis eſt ipſi F; ſic pariter M maior, vel minor, aut æqualis erit ipſi N; nec non AB eodem modo maior, vel minor, aut æqualis erit ipſi CD.

*d Def. 6 huius. e prop. 1 huius.*

EVCL. 8. V.

PROPOSITIO II. *Inæqualium quantitatum maior ad eandem maiorem proportionem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem maiorem proportionem habebit, quàm ad maiorem inæqualium.* Tabula III. Fig. 34. 35.

Sint duæ quantitates AB maior, C minor, & quælibet tertia D eiuſdem

lem generis. Dico primò AB ad D maiorem rationem habere quàm C ad eandem D. Ex maiore AB intelligatur ablata FB æqualis ipſi C, reſidua erit AF: a Intelligaturque ſecta D bifariam, & bifariam ſucceſſiuè, quouſque reperiatur eius pars G, quæ minor ſit, quàm AF (quod fieri poſſe conſtat licet in numeris multoties fracti adhiberi debeant): poſtea ſumatur G ſemel, aut bis, vel ter, & ſic vlterius, quouſque conſurgat N, ex G compoſita, quæ proximè maior ſit quàm FB, ſcilicet exceſſus ipſius N ſupra FB non ſit maior, quàm vna eius particula G: cùmque G minor ſit, quàm AF: erit exceſſus ipſius N ſupra FB minor, quàm AF; & ideo N minor erit, quàm AB, ſed maior, quàm FB, ſeu maior, quàm C (cùm C & FB æquales ſint). Vnde erunt quatuor quantitates AB prima, D ſecunda, C tertia, & D quarta (concipitur enim D, vt ſecunda, & vt quarta). Eſtque b proportio quantitatis primæ AB ad ſecundam D maior illa commenſurabili proportione, quam habet N ad eandem D (eo quod AB maior eſt, quàm N); atque c proportio quantitatis tertiæ C ad quartam D minor eſt eadem commenſurabili proportione, quam habet N ad D (cùm C ſit minor, quàm N). Ergo d

a ex propos. 27 lib. 2.

b Def. 9 huius.

c Def. 9 huius.

d Def. 10. hu.

quantitas AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D.

Secundò dico eandem D ad minorem C habere maiorem proportionem, quàm ad AB. Vt prius, fiat N partes ipſius D, ita vt ſit minor quàm AB, ſed maior, quàm C; & intelligantur O quidem ipſius AB, atque H ipſius C eædem partes, quæ D partes eſt ipſius N. Et *e* quia N minor eſt, quàm AB, erit D minor, quàm O: pariterque quia N maior eſt, quàm C, erit D maior, quàm H. Quapropter erunt quatuor quantitates, prima D, ſecunda C, tertia D (concipitur enim D, vt prima, & vt tertia), & quarta AB; *f* eſtque proportio primæ D ad ſecundam C maior commenſurabili illa proportione, quam habet H ad C ſiue O ad AB (eo quod H minor, quàm D *g* eſt ad C, vt O ad AB); atque proportio tertiæ D ad quartam AB minor eſt eadem commenſurabili proportione, *h* quam habet O ad AB (eo quod D minor eſt, quam O). Ergo *i* D ad C maiorem rationem habet, quàm D ad AB. Quod erat, &c.

*e Corol. prop. 1. huius.*
*f Def. 9 huius.*
*g Def. 8 huius.*
*h Def. 9 huius.*
*i Def. 10. hu.*

EVCL. 7. V. PROPOSITIO III. *Aequales quãtitates ad eandem habent eandem proportionem; & eadem ad æquales.* Tabula III. Fig. 36.

Sint quantitates ejuſdem generis A, B

A, B & C; & A ſit æqualis B. Dico A ad C eſſe, vt B ad C. ſi enim hoc verum non eſt, aliqua *a* quantitas reperietur in natura maior, vel minor quàm A, quæ ad C habeat eandem rationem, quam B habet ad eandem C. Intelligatur illa eſſe, ſeu vocari D. Et quia D & A inæquales ponuntur, eſtque B æqualis A; Ergo D maior, aut minor eſt, quàm B; & ideo *b* D maiorem, aut minorem proportionem habebit ad C, quàm B habet ad eandem C, quod eſt impoſſibile: Poſita enim fuit D ad C, vt B ad eandem C. Non ergo alia quantitas maior, aut minor, quàm A, erit ad C, vt B ad C; ideoque ipſamet A ad C erit, vt B ad C.

a *Axi. 3. huius*

b *prop. 2. huius*

Secundò dico C ad A, atque ad B eandem proportionem habere. Si enim hoc verum non eſt, quam *c* rationem habet C ad B habebit C ad aliquam aliam quantitatem D. Et quia D & A inæquales conceduntur, & eſt B æqualis A: Ergo D maior, aut minor eſt, quam B; & ideò *d* C ad B maiorem, aut minorem rationem habebit, quàm C habeat ad D, quod eſt impoſſibile. Poſita enim fuit C ad B, atque ad D in eadem ratione. Non ergo C ad maiorem, vel minorem, quàm A, eandem rationem habet, quàm C ad B; ideoque C ad ipſam A eandem pro-

c *Axi. 2. huius*

d *prop. 2. huius*

proportionem habet, quam ad B. Quare patet propoſitum.

EVCL. 9. V. PROPOSITIO IV: *Quæ ad eandem quantitatem eandem proportionem habent, æquales ſunt inter ſe. Et ad quas eadem quantitas eandem proportionem habet, ea quoque inter ſe ſunt æquales.* Tabula III. Fig. 37.

Sint tres quantitates A, B & C; & primò A ad C eandem proportionem habeat, quam B ad eandem C. Dico A ipſi B æqualem eſſe. Si enim A non eſt æqualis ipſi B, erit aut maior, aut minor eadem. Ergo *a* A ad C maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm B ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A maior eſt, aut minor, quàm B. vnde æqualis erit ipſi.

*a prop. 2. huius*

Habeat ſecundò eadem C ad A eandem proportionem, quàm ad B. Dico pariter A æqualem eſſe ipſi B. Si enim A non eſt æqualis B: erit aut maior aut minor eadem. Quare eadẽ *b* C ad A minorem, aut maiorem proportionem habebit, quàm ad B, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A maior, aut minor eſt, quàm B. Quare neceſſariò æqualis erit illi. Quod erat oſtendendum.

*b prop. 2. huius*

PRO-

PROPOSITIO V. *Ad eandem quantitatem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt. Et ad quam eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.* Tabula III. Fig. 38. EVCL. 10. V

Habeat primò A ad C maiorem rationem, quàm B ad eandem C. Dico A maiorem eſſe ipſa B. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit A, aut æqualis, aut minor, quàm B; & ideò A *a* eandem, aut *b* minorem rationem habebit ad C, quàm habeat B ad eandem C. quæ ſunt falſa, & contra hypotheſin. Non ergo A æqualis, aut minor eſt, quam B. Quare neceſſe eſt A ipſa B maiorem eſſe.

a prop. 3. huius
b prop. 2. huius

Secundo eadem C habeat ad B maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B ipſa A minorem eſſe. Nam ſi hoc verum non eſt, erit B, aut æqualis, aut maior, quàm A; & ideò C ad B *c* eandem, aut *d* minorem proportionem habebit, quam ad A, quæ ſunt contra hypotheſin. Non ergo B æqualis, aut maior eſt ipſa A. Quare minor erit illa. Quæ erant oſtendenda.

c Prop. 3. huius
d prop. 2. huius

PROPOSITIO VI. *Si duæ proportiones ſimiles fuerint inter ſe, & una illarum maior, aut minor fuerit aliqua tertia proportione: erit quoque reliqua maior aut minor eadē.* T. III. Fig. 39. EVCL. 13. V.

PRO-

Sit A ad B, vt C ad D, & quæli bet alia proportio F ad K: Et primò A ad B habeat maiorem rationem, quàm F ad K. Dico C ad D maiorem proportionem quoque habere, quàm F ad K. Quoniam A ad B maiorem rationem habet, quàm F ad K. Ergo *a* proportio A ad B maior erit aliqua commenſurabili proportione, quæ ponatur eſſe O ad K; At proportio F ad K erit non maior eadem commenſurabili ratione, eiuſdem O ad K. Dico iam quod proportio C ad D maior eſt commenſurabili proportione O ad K. Nam, ſi fieri poteſt, ſit proportio C ad D non maior eadem ratione commenſurabili O ad K; cùmque proportio A ad B maior ſit eadem commenſurabili proportione O ad K. Igitur *b* A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo proportio C ad D eſſe poteſt non maior ratione commenſurabili O ad K; ideoque maior erit illa; eſtque proportio F ad K non maior eadem commenſurabili ratione O ad K. Igitur *c* C ad D maiorem proportionem habebit, quàm F ad K.

*a Def. 10. hu.* *b Def. 10. hu.* *c Def. 10. hu.*

Secundò quando A ad B minorem rationem habet, quàm F ad K: pari modo oſtendetur, quòd proportio C ad D minor eſt commenſurabili ratione O ad K, dum pro-

por-

portio F ad K non minor eſt eadem ratione commenſurabili O ad K. Vnde C ad D minorem rationem habebit, quam F habet ad K. Quæ erant oſtendenda.

PROPOSITIO VII. *Proportiones, quæ ſunt eædem vni tertiæ, ſunt eædem quoque inter ſe.* Tabula III. Fig. 40. EVCL. 11. V.

Sit proportio quantitatis A ad B eadem, quæ C ad D; & pariter E ad F ſit, vt C ad D. Dico eſſe A ad B, vt E ad F. Si hoc verum non eſt, habeat, ſi fieri poteſt, A ad B maiorem proportionem, aut minorem, quàm E habet ad F. Et quia proportio E ad F eadem ſuppoſita eſt, quæ C ad D; & proportio E ad F maior, aut minor conceſſa eſt proportione magnitudinis A ad B. Ergo *a* C ad D maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm A ad B, quod eſt contra hypotheſin. Erat enim C ad D, vt A ad B. Non ergo A ad B maiorem, aut minorem proportionem habere poteſt, quàm E ad F; & ideo A ad B erit, vt E ad F. Quod erat oſtendendum. *a prop. 6. huius*

PROPOSITIO VIII. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales, & quinta ſit maior, quàm prima, & ſexta non maior quàm tertia: erit*

*quin-*

*quinta ad ſecundam in maiori propor-tione, quàm ſexta ad quartam: Et quinta ad ſextam in maiori proportio-ne, quàm prima ad tertiam. Et ſi, quinta maior ſit ſecunda, & ſexta non maior quarta, erit prima ad quintam in minori proportione, quàm tertia ad ſextam.* Tabula III. Figura 41. & Tab. IV. Fig. 1.

Sit A ad B in eadem ratione, quam C habet ad D & E ſit maior, quàm A, & H non ſit maior, quàm C ideſt ſit H æqualis, aut minor ipſa C. Dico primò E ad B maiorem proportionem habere, quàm H ad
*a prop. 2 huius.* D. Quia *a* maior E ad B maiorem rationem habet, quàm minor A ad eandem B; eſtque C ad D, vt A ad
*b prop. 6. huius* B: Ergo *b* E ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D; ſed C æqualis, aut maior eſt, quàm H.
*c prop. 3. huius* Igitur C ad *c* eandem D eandem,
*d prop. 2 huius.* aut *d* maiorem rationem habet, quàm H ad D. Quare *e* proportio
*e Prop. 6. huius* E ad B adhuc maior erit proportione H ad D.

Secundò dico E ad H maiorem proportionem habere, quam A ad C. Quoniam E maior eſt, quàm A.
*f prop. 2 huius.* Ergo *f* E ad H maiorem rationem habebit, quàm A ad eandem H; eſt-
*g prop. 3. huius* que H æqualis, aut minor ipſa C.
*h prop. 2 huius.* Igitur eadem A ad H *g* eandem, *h* aut maiorem rationem habet, quàm
*i prop 6 huius.* ad C. Et propterea *i* E ad H adhuc ma-

maiorem proportionem habebit, quàm A habet ad C.

Tertiò ſit E maior ſecunda B proportionalium, & H non ſit maior quam D. Dico A ad E minorem proportionem habere, quàm C ad H. Quoniam E maior eſt, quàm B, at H non eſt maior, quàm D. Ergo *l* eadem A ad maiorem E habebit minorem proportionem, quàm ad B minorem; eſtque C ad D, vt A ad B. Igitur *m* A ad E minorem proportionem habet quam C ad D. Sed eadem C ad non maiorem H *n* eandem, aut *o* maiorem proportionem habet, quàm ad D. Igitur *p* proportio A ad E adhuc minor erit proportione C ad H. Vt propoſitum fuerat.

*l prop. 2 huius.* *m prop. 6. huius* *n prop. 3 huius.* *o prop. 2 huius.* *p prop. 6. huius*

PROPOSITIO IX. *Si prima quantitas ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, erit ſecunda ad primam, vt quarta ad tertiam: Vocetur huiuſmodi argumentandi forma* Inuerſio rationis. Tabula IV. Fig. 2.

EVCL. *Coroll. prop. 4. lib. V.*

Sit A ad B, vt C ad D. Dico B ad A eandem rationem habere, quam D ad C. Si enim hoc verum non eſt, habebit B ad A maiorem, aut minorem proportionem, quàm D habet ad C; & ſi fieri poteſt, primò ſit proportio maior. Ergo *a* proportio B ad A maior erit; pro-

*a Def. 10.*

por-

portiò verò D ad C non erit maior eadem proportione commenſurabili (quæ ponatur eſſe quantitatis E ad A, atque H ad C); & propterea B maior erit, quàm E, ſed D non erit maior, quàm H. Et quoniam E ad A, atque H ad C *in* eadem ſunt proportione commenſurabili. *b* Igitur E ipſius A, atque H alterius C eædem partes erunt; & è contra *c* A ipſius E, nec non C alterius H eædem partes erunt: & ideo *d* A ad E, atque C ad H in eadem proportione erunt; eſtque B maior, quam E, atque D non maior quam H. Igitur *e* A ad B proportionem minorem habet, quàm C habeat ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad *B*, vt C ad D. Quapropter B ad A non habet maiorem proportionem, quàm D ad C. Similiter oſtendetur, quòd D ad C non habet maiorem proportionem, quàm B ad A; & ideo *B* ad A neque minorem proportionem habebit, quàm D ad C. Et propterea *f* B ad A erit, vt D ad C. Quod erat oſtendendum.

*b Def. 8*
*c Def. 6 huius.*
*d Def. 8 huius*
*e prop. 8 huius.*
*f Def. 12. hu.*

*Corollarium*. Ex hac demonſtratione colligitur, quòd, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam: inuertendo ſecunda ad primam minorem rationem habebit, quàm quarta ad tertiam. Ex eo enim, quod

*Pappi Alex. prop. 7. lib. VII*

quod proportio B ad A poſita fuit maior, quàm D ad C, demonſtrata fuit proportio A ad B minor proportione ipſius C ad D.

PROPOSITIO X. *Si quatuor quantitatum eiuſdem generis duæ antecedentes duarum conſequentium æquè multiplices fuerint; & antecedens antecedentis tantùm, vel conſequens conſequentis tantùm multiplex fuerit: erunt viciſſim proportionales.* Tabula IV. Fig. 3.

Sint quatuor quantitates eiuſdem generis, AB quidem ipſius E, & C D ipſius F æquè multiplices. Et primò ſit E ipſius F multiplex. Dico AB ad CD eſſe, vt E ad F. Quoniam AB & CD ipſarum E & F æquè multiplices ſunt, ſectis antecedentibus in ſuas partes, erunt *a* in AB tot partes AG, GH & HB, ſingulæ æquales ipſi E, quot ſunt in CD partes CI, IK & KD, ſingulæ æquales ipſi F, ideoque, *b* quæ pars eſt F ipſius E eadem pars erunt CI ipſius GA & IK ipſius GH & KD ipſius HB. Ergo *c* quoties F multiplicata æqualis ſit ipſi E, toties C I multiplicata æqualis ſit ipſi AG, & toties IK multiplicata efficitur æqualis ipſi GH, necnon KD toties multiplicata efficitur æqualis ipſi H B, & ſic reliqua ſegmenta ſi plura extiterint, quæ totidem ſunt in C D,

*a Def. 5. huius*

*b prop. 3. huius*

*c Def. 4. huius*

D, quot in AB. Ergo quoties F multiplicata æqualis ſit ipſi E, toties ipſæ CI, IK, KD, ideſt ipſa CD multiplicata efficitur æqualis ipſis AG, GH, HB, ſeu ipſi AB. Et propterea CD toties menſurat ipſam AB, quoties F metitur *ipſam* E. & ideo *d* AB ipſius CD tam multiplex eſt, quàm E ipſius F. Vt erat probandum.

*d Def. 5. huius*

Secundò ijſdem poſitis ſit AB multiplex ipſius CD. Dico eſſe E ad F, vt AB ad CD. Fiat M ipſius F tam multiplex, quàm AB ipſius CD, eſtque pars CD multiplex *ipſius* F. Ergo *e* AB ad M eſt, vt CD ad F, erat autem, vt CD ad F, ita AB ad E. Ergo *f* eadem AB ad duas M & E eandem rationem habet; ideoque *g* E & M inter ſe æquales ſunt. Vnde *h* AB ipſius CD & E ipſius F æquè multiplices erunt. Quare &c.

*e ex prima parte.*
*f prop. 7 huius.*
*g prop. 4. huius*
*h prop. 3. huius*

PROPOSITIO XI. *Eiuſdem generis partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione.* Tabula IV. Fig. 4.

EVCL. 15. V.

Sint A ipſius B & C alterius D æquè multiplices, & eiuſdem generis. Dico A ad C eſſe, vt B ad D. Si enim hoc vèrum non eſt, habeat primò, ſi fieri poteſt, A ad C maiorem proportionem, quàm B ad D. Ergo *a* proportio A ad C maior

*a Def. 10. hu.*

ior erit; proportio verò B ad D non erit maior eadem proportione commenſurabili (quam intelligatur habere E ad C, atque H ad D; & ipſarum communes menſuræ eædem ſint R & S) Quare A maior erit quàm E, at B non erit maior, quàm H. Et quoniam ſunt C, D æquales, vel æquè multiplices ipſarum, R & S cum hæ æquè metiantur illas, & eſt C ipſius D multiplex. Ergo b R ipſius S & C ipſius D æquè multiplices ſunt. Rurſus quia E & H æquales, vel æquè multiplices ſunt ipſarum R &; S & R eſt multiplex ipſius S. Ergo c E ipſius H tam multiplex eſt, quam R ipſius S, ſeu d quàm C ipſius D: eſt verò A ipſius B tam multiplex, quàm C ipſius D: Ergo e E ipſius H tam multiplex eſt, quàm A eſt multiplex ipſius B; ideoque f ſicuti E minor eſt, quàm A, ita H minor erit, quàm B; ſed conceſſa fuit H non minor, quàm B, quod eſt abſurdum, Non ergo A ad C maiorem proportionem habet, quàm B ad D. Eadem ratione oſtendetur A ad C non habere minorem proportionem, quàm B ad D. Quare g A ad C erit, vt vt B ad D. Quod erat probandum.

b prop. 10. hu.

c prop. 10. hu.

d prop. 9. huius

e prop. 9. huius

f prop. 1 huius.

g Def. 12. hu.

PROPOSITIO XII. *Si quatuor quantitates eiuſdem generis proportionales fuerint, & viciſſim proportio.*

EVCL. 16. V.

*tionales erunt. Vocatur autem talis argumentandi forma* Permutatio rationis. Tabula IV. Fig. 5.

Sit A ad B, vt C ad D; ſintque omnes eiuſdem generis. Dico eſſe A ad C, vt B ad D. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad C maiorem, aut minorem proportionem, quàm B ad D. Et primò ſit proportio maior, ſi fieri poteſt. Ergo *a* proportio A ad C maior erit, proportio verò B ad D non erit maior, eadem proportione commenſurabili (quam intelligatur habere E ad C, atque H ad D, & ipſarum communes menſuræ eædem ſint K & N:) quare A maior erit, quàm E, ſed B non erit maior, quàm H; cùmque ſit E ad C, vt H ad D. *b* Igitur maior erit proportio A ad B quàm E ad H, ſed *c* K ad N eſt vt E ad H (cùm ille ſint harum eædem menſuræ) Ergo *d* A ad B maiorem proportionem habet, quàm K ad N; eſt verò *e* C ad D, vt K ad N (cùm hæ ſint illarum eædem menſuræ.) Igitut A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Quapropter A ad C non habebit maiorem proportionem, quàm B ad D.

*a Def. 10. huius.* *b prop. 8. huius.* *c prop. 11. hu.* *d prop. 6. huius* *e prop. 11. hu.* *f prop. 6. huius*

Similiter oſtendetur, quòd B ad D non habet maiorem proportionem, quàm A ad C; & ideò A ad

C,

C, neque minorem proportionem habebit, quam B ad D. Quare g A ad C eandem rationem habebit, quàm B habet ad D. Vt propoſitum fuerat. Vocetur hæc argumentandi forma *Permutatio rationis.* g *Def. 12. hu.*

*Corollarium.* Deducitur ex hac demonſtratione, quod ſi prima quantitas ad ſecundam habuerit maiorem rationem, quàm tertia habet ad quartam; permutando prima ad tertiam maiorem rationem habebit, quàm ſecunda ad quartam. Nam ex poſitione, quòd A ad C habeat maiorem proportionem, quàm B ad D, conſequitur, permutando, habere A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. *Pappi 5 VII.*

PROPOSTIO XIII. *Si coniunctæ quantitates proportionales fuerint, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma* Diuiſio terminorum rationis. EVCL. 17.

Tab. IV. Fig. 6.

Sint A & B, ſimul ſumptæ, ad B, vt C & D, ſimul ſumptæ, ad D. Dico A ad B eſſe, vt C ad D. Si enim hoc verum non eſt habebit A ad B maiorem, aut minorem proportionem, quàm C habet ad D. Et ſit primò proportio maior. a Ergo proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D non erit a *Def. 10. hu.*

 ma-

maior, eadem proportione commenſurabili (quam habeat E ad B, atque H ad D; & ipſarum communes menſuræ eædem ſint K & N). Quare A maior erit, quàm E, ſed C non erit maior, quàm H. Et quia E & H æquè menſurantur ab ipſis K & N. Ergo *b* tot partes erunt in E, ſingulæ æquales K, quot ſunt in H, ſingulæ æquales N. Rurſus quia K, N æquè metiuntur ipſas B & D, tot *c* partes erunt in B, ſingulæ æquales K, quot ſunt in D ſingulæ æquales N. Quapropter, ſi æqualibus multitudinibus partium contentarum in E & H addantur æquales multitudines partium ipſarum B & D: erunt in EB, ſimul ſumptis, tot partes æquales ipſi K, quot ſunt partes in aggregato H, D contentæ, menſuratæque ab N; & ideò *d* EB, erit eædem partes ipſius B, quam eſt HD partes alterius D. Cùmque A maior conceſſa ſit, quàm E, addita B communi: erit AB maior, quàm EB. Et quia C non maior conceſſa eſt, quàm H, addita D communi: erit CD non maior quàm HD. *e* & quia EB ad B eſt, vt HD ad D, atque AB maior eſt, quàm EB, & CD non eſt maior, quàm HD. Ergo *f* AB ad B maiorem proportionem habebit, quàm CD ad D, quod eſt abſurdum; Erat enim ex hypotheſi AB ad B, vt

b *Def. 4. huius*

c *Def. 4. huius*

d *Def. 6. huius*

e *Def. 8. huius*

f *prop. 8. huius.*

C D ad D. Non ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm C ad D. Similiter oſtendetur, quòd C ad D non habet maiorem proportionem, quàm A ad B; & ideò A ad B neque minorem proportionem habebit, quàm C ad D. g Quapropter A ad B erit in eadem proportione, quam C habet ad D. Quod erat oſtendendum. *g Def. 12. hu.*

*Corrollarium* Hinc colligitur, quòd, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quam tertia ad quartam, coniungendo habebunt prima & ſecunda, ſimul ſumptæ, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia & quarta, ſimul ſumptæ, ad quartam. Ex eo enim, quod proportio A ad B poſita fuit maior, quàm C ad D, demonſtratum eſt A B habere maiorem proportionem ad B, quàm C D habent ad D. *Pappi. 3 VII.*

PROPOSITIO XIV. *Si diuiſæ quantitates proportionales fuerint, hæ quoque coniunctæ proportionales erunt. Vocetur hæc argumentatio.* Coniunctio terminorum rationis. Tab. IV. Fig. 7. *EVCL. 18.*

Sit A ad B, vt C ad D. Dico eſſe A, B, ſimul ſumptas, ad B in eadem ratione, ac ſunt C, D, ſimul ſumptæ, ad D. Si hoc verum non eſt, aliqua alia quantitas H B maior,

ior, vel minor, quàm A B habeb[it] ad ipſam B eandem rationem, qua[m] C D ad D. Ergo *a* diuidendo H ad B erit, vt C ad D; ſed A maior, aut minor eſt, quàm H (eo quod H B inæqualis erat ipſi AB, & tollitur B communis) Ergo *b* A *ad B* maiorem, aut minorem proportionem habet, quàm H ad eandem B; erat autem C ad D, vt H ad B. Igitur *c* A ad B maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm C habet ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Non ergo aliqua qu*antita[s]* maior, vel minor, quàm AB eandem rationem habere poteſt ad B, quàm CD habet ad D; & ideò A B ad B erit, vt CD ad D. quod erat probandum. Vocetur hæc argumentandi forma *Coniunctio terminorum rationis*.

a prop. 13. hu.

b prop. 2. huius

c prop. 6. huius

Campani 29 V

*Corollarium* Colligitur pariter, quòd, ſi quantitas prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad quartam, diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Conceſſum enim fuit, quod A B ad B habeat maiorem proportionem, quàm C D ad B; & demonſtratum *d* eſt A ad B maiorem proportionem

d prop. ...

por-

portionem habere, quàm C ad D.

PROPOSITIO XV. *Si quantitatum aggregata fuerint, vt ablata portiones: erunt reſidua, vt aggregata. Et ſi portiones proportionales fuerint: aggregata eandem rationem habebunt, quam portiones.* Tabula IV. Fig. 8. 9. EVCL. 19. & 12. V.

Sit primò aggregatum A, C ad aggregatum B, D, vt ablata portio C ad ablatam D. Dico reſiduum A ad reſiduum B eſſe vt A C ad B D. Quoniam AC ad B D eſt, vt C ad D. Ergo *a* permutando A C ad C eſt, vt B D ad D: Et diuidendo *b* A ad C erit vt B ad D. Et inuertendo *c* C ad A erit, vt D ad B; Et coniungendo *d* CA ad A erit vt DB ad B. Et iterum permutando *e* C A ad D B erit, vt A ad B. Quod erat primum. *a prop. 12. hu. b prop. 13. hu. c Prop. 9. huius d prop. 14. hu. e prop. 12. hu.*

Secundò ſit A ad B, vt C ad D. Dico A C ad B D eſſe vt A ad B, vel vt C ad D. Quia A ad B eſt, vt C ad D, erit permutando *f* A ad C, vt B ad D: Et coniungendo *g* AC ad C vt BD ad D. Et iterum permutando *h* AC ad BD erit, vt C ad D, ſeu vt A ad B. Et ſi rurſus ſit E ad F, vt C ad D. Quia A C ad BD eſt, vt eadem C ad eandem D. Ergo rurſus erunt quatuor *f prop. 12. hu. g prop. 14. hu. h prop. 12. hu.*

 quan-

quantitates proportionales AC ac BD, vt E ad F; & ideo, vt priu A, C, E erunt ad B, D, F, vt E ad F, ſeu vt A ad B. Quod propoſitum fuerat.

EVCL. 25. V. PROPOSITIO XVI. *Si quatuor quantitates eiuſdem generis proportionales fuerint: maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.* Tabula IV. Fig. 10.

Sint quatuor quantitates eiuſdem generis A ad B in eadem proportione, ac C ad D; ſitque A omnium maxima, & D minima. Dico A & D, ſimul ſumptas, maiores eſſe, quàm B & C ſimul. Ponatur F æqualis exceſſui maximæ A ſupra C & H æqualis exceſſui ipſius B ſupra minimam D: Patet C & F ſimul æquales eſſe A, atque D & H ſimul æquales eſſe B. Et quoniam, vt A ad B, ſeu, vt totum FC ad totum HD, ita eſt C ad D ablatum ad ablatum. Ergo *a* reſiduum F ad reſiduum H erit, vt totum ad totum, ſcilicet, vt A ad B; ſed quia A, vt maxima maior eſt, quàm B: erit quoque F maior, quàm H. (Nam ſi non maior eſſet, haberet *b* A ad B maiorem proportionem, quàm F ad H, quod eſt falſum: Oſtenſi enim fuerunt A, B, F, H, proportionales), ſi igitur inæqualibus F & H addantur communiter amba

*a prop. 15 hu.*

*b ax. 6 huius.*

C, D

C, D ſimul, erit *c* ſumma quantitatum F, C & D maior, quàm ſumma quantitatum H, D, & C: Sunt verò F, C & D æquales A & D (cùm FC oſtenſa ſit æqualis A & D ſit communis); atque eadem ratione H, D & C æquales ſunt B & C. Quare maxima A cum minima D maiores ſunt, quàm B, C ſimul. Quod erat, &c. *c Ax. 4 lib. 1.*

*Corollarium* Manifeſtum eſt, quòd, ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, erunt directè, & viciſſim vnà maiores, aut vnà æquales, aut vnà minores. EVCL. 14. V.

Fuit enim A ad B, vt F ad H, & oſtenſum eſt, *d* quando A maior eſt, quàm B, non eſſe F æqualem, aut minorem ipſa H, & contra. Igitur antecedentes A & F erunt vnà maiores, aut vnà æquales, aut vnà minores conſequentibus B & H. Rurſus quia *e* viciſſim A ad F eſt, vt B ad H. Igitur A & B ſunt vnà maiores, aut vnà æquales, aut ſimul minores ipſis F & H. *d prop. 16. hu.* *e prop. 12. hu.*

PROPOSITIO XVII. *Si duabus ſimilibus proportionibus commenſurabilibus duæ aliæ ſimiles proportiones commenſurabiles continuentur, termini priores ad poſteriores erunt in eadem commenſurabili proportione.* Tabula IV. Fig. 11.

Sit A ad B in eadem commenſurabili ratione, quam habet C ad D; atque B ad E ſit in eadem commenſurabili proportione, quam D habet ad F. Dico A ad E in eadem ratione commenſurabili eſſe, in qua C ad F. Sit G communis menſura ipſarum A, B; atque H ſit communis menſura duarum B, E, & intelligatur *a* K toties metiri ipſam G, quoties H ipſam B metitur. Ergo *b* permutando K toties metitur ipſã H, quoties G ipſã B menſurat; cũq; H menſuret ipſas B & E: Igitur *c* K metitur ipſas B & E. Rurſus quia K metitur ipſã G, ſed G mẽſurat ipſas A, B; Ergo *d* eadem K metitur, nedùm ipſam E, ſed etiam ipſàs A & B. Poſtea intelligatur *e* O, quæ toties menſuret ipſam D, quoties K metitur B, atque M ſit ad O, vt A ad K, pariterque N ſit ad O, vt E ad K. Et quoniam A, & M æquè multiplices ſunt ipſarum K & O, pariterque E, & N æquè multiplices ſunt earundem K & O. Ergo *f* A ipſius E eædem partes eſt, ac M alterius N; ſuntque B & D æquè multiplices earundem K & O: Igitur *g* A & M eædem partes ſunt ipſarum B & D; ſed C ad D erat, vt A ad B: Ergo *h* C & M eædem partes ſunt eiuſdem D; ideoque *i* C æqualis eſt M. Eodem modo oſtendetur F æqualis ipſi N. Quare *l* C ad

*a Ax.3 huius.*
*b prop. 10. hu.*
*c Ax.1 huius.*
*d Ax.1 huius.*
*e Ax 3 huius.*
*f Def.6 huius.*
*g Def.6 huius.*
*h Prop. 7. huius*
*i prop.4 huius.*
*l prop.3 huius.*

ad F erit, vt M ad N; & oſtenſa ſ fuit A ad E, vt M ad N. Igitur *m* A ad E erit, vt C ad F. Quod erat probandum. m prop. 7. huius

*Corollarium* Deducitur ex demonſtratione huius propoſitionis, quòd duæ quantitates, quæ vni tertiæ commenſurabiles ſunt, inter ſe quoque ſunt commenſurabiles. EVCL. 12. X.

Nam A & E eidem B commenſurabiles poſitæ fuerunt; eo quod G erat communis menſura ipſarum A & B; nec non H erat communis menſura ipſarum B & E: & oſtenſum *n* fuit K communi menſura extremas A & E metiri. n prop. 17. huius

PROPOSITIO XVIII. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales, habebunt antecedentes eandem rationem quoque ad duas quantitates, eandem proportionem commenſurabilem habentes ad eaſdem conſequentes.* Tabula IV. Fig. 12.

Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D, & habeat E ad B eandem proportionem commenſurabilem, quam H habet ad D. Dico A ad E eſſe, vt C ad H. Si enim hoc verum non eſt habebit A ad E maiorem, aut minorem proportionem, quàm C ad H. Et ſit primò proportio maior, ſi fieri poteſt. *a* Ergo proportio A ad E maior a Def. 10. huius

C ad H. Et ſi rurſus plures aliæ proportiones ſimiles G ad S & H ad R ſuceſſiuè addantur, ſemper eodem modo conſiderando tres quantitates A, G, S, & tres alias C, H, R, vt prius oſtendentur compoſitæ proportiones A ad S & C ad R, ſimiles eſſe, vt fuit propoſitum. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma *Compoſitio ordinata proportionum*. Et ſi quidem componentes proportiones continuatæ A ad B, B ad G & G ad S fuerint ſimiles inter ſe: Vocetur proportio A ad G *Duplicata proportionis* A ad B, vel B ad G; atque proportio A ad S vocetur *Triplicata vnius rationis* A ad B, & *Seſquilatera rationis* A ad G, & ſic ſucceſſiuè. Si verò proportiones continuatæ A ad B & B ad G & G ad S non fuerint eædem inter ſe: vocabitur abſolutè proportiò ipſius A ad S *Compoſita ex intermedijs proportionibus* A ad B, B ad G & G ad S.

EVCL. 4. *V.* *Corollarium* Si quatuor quantitates proportionales fuerint quælibet æquè multiplices antecedentium ad quaſlibet æquè multiplices conſequentium proportionales erunt.

Nam, ſi B ad G eſt, vt D ad H & ijs aliæ proportiones ſimiles addantur, vt ſit A tam multiplex ipſius B, quàm C alterius D, atque G eadem

dem pars ſit ipſius S atque H alterius R. Ergo f erit A ad S, vt C ad R. f prop. 19. hu.

PROPOSITIO XX. *Si proportionibus ſimilibus alia proportiones ſimiles perturbatè addantur: erunt proportiones, ex paribus multitudinibus proportionum compoſita, ſimiles quoque inter ſe. Vocetur autem hac argumentandi forma* Compoſitio perturbata proportionum. Tab: IV. Fig. 15. EVCL. 23. V.

Sit quantitas A ad B, vt C ad D & his proportionibus ſimilibus addantur duæ aliæ proportiones ſimiles, ſed ordine perturbato ita vt ſit B ad E, ſicut F ad C. Dico proportionem A ad E, compoſitam ex proportionibus A ad B & B ad E eandem eſſe, quæ ipſius F ad D; quæ nimirum compoſita eſt ex ijſdem proportionibus C ad D & F ad C. Quoniam quam proportionem habet B ad E, habebit aliqua a alia quantitas ad ipſam A licet illa ſit ignota, tamen quia dari poteſt, ſupponatur eſſe G, ſeu vocetur G. Et quoniam G ad A eſt, vt B ad E; ſed F ad C eſt, vt eadem B ad eandem E. Ergo b G ad A eſt, vt F ad C, & A ad B eſt, vt C ad D. Ergo c ex compoſitione ordinata erit G ad B, vt F ad D. Poſtea quia, vt G ad A, ita eſt B ad

a Axi. 3. huius
b prop. 9 huius.
c prop. 19. hu.

E.

d prop. 12. hu. E. Ergo *d* permutando, vt G ad B, ita eſt A ad E: ſed vt G ad B, ſic fuit oſtenſa F ad D. Igitur, *e* vt A ad E, ita erit F ad D.

e prop. 7 huius.

Si rurſus plures aliæ proportiones ſimiles E ad H & K ad F ſucceſſiuè addantur, ſemper eodem modo conſiderando tres quantitates, AE & H, & tres aliæ K, F & D, vt prius oſtendetur compoſitæ proportiones A ad H & K ad D ſimiles eſſe inter ſe. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXI. *Si à proportionibus ſimilibus auferantur proportiones ſimiles, ſiue ordinatè, ſiue perturbatè: reſiduæ proportiones, ſimiles quoque erunt.* Tabula IV. Fig. 16. 17. 18.

Sit proportio cuiuſlibet quantitatis A ad B, vt C ad D; atque ab his proportionibus ſimilibus, ſiue eiſdem tollantur eædem proportiones, primò ordinatè, ita vt ſit A ad E, vt C ad F. Dico reſiduas proportiones E ad B, & F ad D eſſe eaſdem. Quia *a* inuertendo, vt E ad A, ita eſt F ad C; & vt A ad B, ita eſt C ad D. Ergo componendo *b* ordinatè, vt E ad B, ita erit F ad D.

a prop. 9 huius.

b prop. 19. hu.

Tollantur ſecundò perturbatè proportiones eædem, ita vt ſit A ad E, vt F ad D. Dico reſiduas proportiones E ad B & C ad F eſſe eaſdem. Quoniam inuertendo *c* eſt, vt

c prop. [illegible]

B ad

B ad A, ita D ad C, & vt A ad E, ita eſt F ad D; Ergo ex *d* compoſitione perturbata, vt B ad E, ita eſt F ad C; & inuertendo *e* vt E ad B, ita eſt C ad F. Quod erat oſtendendum.

*d pr. 20. huius.* *e prop. 9 huius.*

*Corollarium.* Ex tribus præcedentibus propoſitionibus elicitur, ſi aliqua proportio compoſita fuerit ex aliquibus proportionibus, eam quoque componi ex ijſdem proportionibus, quocunque ordine poſitis.

Si enim proportio A ad B, interpoſitis terminis C, D, & E, ſit compoſita ex proportionibus 1, 2, 3. 4, eadem erit compoſita ex eiſdem proportionibus, ſed ordine perturbato 2, 1, 4, 3, interpoſitis alijs terminis F, G, & H. Nam, *f* vt A ad D, ita eſt A ad G; & rurſus, *g* vt D ad B, ita eſt G ad B. Ergo *h* A ad B eſt, vt A ad B alterius ordinis.

*f pr. 20. huius* *g pr. 20. huius.* *h pr. 20 huius.*

PROPOSITIO XXII. *Si duæ quantitates ad duas conſequentes habuerint eandem rationem, atque duæ aliæ ad eaſdem conſequentes habeant etiam eandem rationem: habebunt antecedentes, ſimul ſumptæ, eandem rationem ad eaſdem conſequentes.* Tab. IV. Fig. 19.

EVCL. 24. V.

Sit A ad B, vt C ad D, atque F ad eandem B ſit, vt H ad eandem D. Dico duas antecedentes A &

F ſimul, habere ad B eandem rationem, quam duæ C & H ſimul ad D. Quoniam vt F ad B, ita eſt H ad D. *a* Ergo inuertendo, vt B ad F, ita eſt D ad H; ſed A ad B eſt, vt C ad D: ergo *b* componendo ordinatè erit, vt A ad F, ita C ad H; & coniungendo *c* erunt A & F ad F, vt C & H ad H: ſed F ad B erat, vt H ad D. Ergo *d* rurſus, ex compoſitione ordinata, erunt AF ſimul, ad B, vt HC ſimul ſumptæ, ad D. Quod erat oſtendendum.

*a prop. 9. huius*
*b pr. 19 huius.*
*c pr. 14. huius.*
*d pr 19 huius.*

PROPOSITIO XXIII. *Si fuerint quatuor quantitates, & qualibet alia proportionales commenſurabiliter conſequentibus, fuerint vnà maiores, aut ſimul æquales, aut vnà minores antecedentibus ordinatè: erunt quatuor illæ quantitates proportionales.* Tab. IV. Fig. 20.

Sint quatuor quantitates, prima A, ſecunda B, tertia C, & quarta D; & inſuper quinta G ad B eandem rationem commenſurabilem habeat, quam ſexta H ad D, ſintque dictæ commenſurabiles proportiones, quęlibet ex infinitis, quæ proponi poſſunt; & quotieſcumque G eſt æqualis primæ A ſit pariter H æqualis tertiæ C, & quoties G minor eſt, quàm A, ſit pariter H minor, quàm C, & quotieſcunque G maior eſt,

quàm

quàm A reperiatur ſemper H maior, quàm C, & hoc ſemper verificetur in infinitis proportionalitatibus cõmenſurabilibus. Dico 1 A ad 2 B eandem proportionem habere, quam tertia C ad quartam D. Si hoc verum non eſt, habebit A ad B maiorem, aut minorem rationem, quàm C ad D. Et ſit primò proportio maior, ſi fieri poteſt. Ergo *a* proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D non erit maior eadem proportione commenſurabili (quàm intelligatur habere G ad B, atque H ad D) eritque A maior, quàm G, at C non erit maior, quam H. Quare duæ quantitates G, & H eandem rationem commenſurabilem habentes, ad duas conſequentes B & D non erunt vnà minores antecedentibus, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D. Simili ratiocinio oſtendetur C ad D non habere maiorem rationem, quàm A ad B; vnde A ad B non habebit minorem proportionem, quàm C ad D; ſed neque maiorem rationem habebat, vt oſtẽſum eſt. Ergo *b* quatuor quantitates A, B, C, D, ſunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

a *Def.* 20. *huius*

b *Def.* 12. *huius*

PROPOSITIO XXIV. *Si fuerint quatuor quantitates, & duæ aliæ pro-*

*por-*

*portionales conſequentibus ſint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus exceſſu, vel defectu à prima minori quocunque dato, erunt illæ proportionales.* Tabula IV. Figura 21. 22.

Sint quatuor quantitates A B, C, D, F, & duæ aliæ H & O quamlibet proportionem eandem habentes ad C & F, ſint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus A B & D, ita vt exceſſus vel defectus ipſius H à prima AB minor ſit quacunque aſſignabili quantitate ex infinitis, quæ proponi poſſunt. Dico A B ad C eſſe in eadem ratione, ac D ad F. Si enim hoc verum non eſt, aliqua *a* alia quantitas maior, vel minor, quàm AB in natura reperiri poterit, quæ habeat ad C eandem rationem, quam D habet ad F, & ſit illa, vel vocetur GB, quæ primò ſit minor, quàm A B, deficiens ab ipſa quocunque defectu A G. Et quoniam H, & O proportionales ipſis C & F ſupponuntur eſſe vnà minores antecedentibus A B & D, ita vt defectus ipſius H à prima A B minor ſit quacunque aſſignabili quantitate, poterit eſſe defectus ipſius H à prima AB minor; quàm AG; & ideò H maior erit, quàm GB, dum O minor ſupponitur, quam D; eſt verò GB ad C in eadem ratione, ac D ad F. Igitur

*a Axiomatis.* *huius.*

b H ad C maiorem proportionem habet, quam O ad F, quod eſt falſum; ſuppoſita enim fuit H ad C, vt O ad F. Nulla ergo quantitas minor quàm AB eandem rationem habebit ad C, quàm D habet ad F. b prop. 8. lini

Secundò ſit G B maior, quàm AB exceſſu quolibet GA. Et quia H & O proportionales ipſis C & F, ſupponuntur vnà maiores antecedentibus exceſſu à prima minori quocunque dato GA, propterea erit H minor, quàm G B. Et, vt priùs, oſtendetur O ad F maiorem proportionem habere, quàm H ad C, quod eſt abſurdum. Erant enim ex hypotheſi H & O proportionales ipſis C & F. Nulla ergo quantitas maior, quàm A B, ſicuti prius nulla minor, habebit eandem rationem ad C, quàm D habet ad F. Igitur ipſamet AB ad C eandem proportionem habebit, quam D habet ad F. Quod erat propoſitum.

## SCHOLIVM.

Præter hos modos venandi, an quatuor quantitates ſint proportionales nec ne, datur hic alius, qui eſt valdè vſitatus apud Euclidem, & Archimedem.

Si quantitas maior, quàm prima exceſſu minore quouis aſſignabili, habuerit ad ſecundam maiorem pro-

proportionem, quam tertia ad quartam, & quantitas minor, quàm prima, defectu minore quocunque aſſignabili, habuerit ad ſecundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam: erit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam. Quoniam quantitatis, habentis maiorem, aut minorem proportionem ad ſecundam, quam tertia ad quartam, exceſſus, aut defectus à prima ſupponitur minor quacunque aſſignabili quantitate ex infinitis, quæ proponi poſſunt; ſed quælibet quantitas maior, quàm prima, aliquo exceſſu ipſam ſuperat, qui minor erit aliqua aſſignabili quantitate. Ergo quælibet quantitas maior, quàm prima, habet maiorem proportionem ad ſecundam, quàm *tertia habet ad* quartam quantitatem; *ideoque* nulla quantitas maior, quàm prima, habebit ad ſecundam eandem rationem, quam tertia habet ad quartam.

Similiter quælibet quantitas minor, quàm prima, deficit ab ea defectu minore aliqua aſſignabili quantitate; & propterea nulla quantitas minor, quàm prima, habebit ad ſecundam eandem proportionem, quã tertia habet ad quartam. Cùm ergo *c* aliqua quantitas reperiatur in natura, quæ ſit ad ſecundam, vt tertia ad quartam, & illa non poſſit eſſe maior nec minor, quàm prima, licet

*c Ax. 3 huius.*

eiuſ-

eiuſdem generis ſit. Igitur ipſamet prima ad ſecundam habebit eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam.

PROPOSITIO XXV. *Si æquè multiplicium quatuor quantitatum multiplex prima excesserit multiplicem ſecundæ, at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm tertia ad quartam.* Tab. IV. Fig. 23. EVCL. *Def.* 8. *lib.* V.

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & ſumptis E & F æquè multiplicibus antecedentium A & C, nec non ſumptis G & H æquè multiplicibus conſequentium B & D, ſitque E multiplex primæ maior, quàm G multiplex ſecundæ; at F multiplex tertiæ non ſit maior, quàm H multiplex quartæ. Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D. Quia E maior eſt quàm G, & F non eſt maior, quàm H: Ergo *a* E ad G maiorem proportionem habet, quàm F ad H; ſed *b* A ad E eſt, vt C ad F, cùm ſint illarum pars eadem: ergo *c* A ad G maiorem rationem habet, quàm C ad H: & rurſus *d* G ad B eſt, vt H ad D, cùm ſint harum æquè multiplices. Igitur *e* A ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D. Quod erat oſtendendum.

*a Axi.* 6. *huius* *b Def.* 8 *huius.* *c ex pr.* 19. *hu.* *d Def.* 8. *hu.* *e ex pr.* 19. *hu.*

PRO-

EVCL. conuer. def. 8. V

PROPOSITIO XXVI. *Si prima quantitas ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quam tertia ad quartam, reperiri poſſunt aquè multiplices antecedentium, atque aliæ aquè multiplices conſequentium, quarum multiplex primæ excedat multiplicem ſecunda, at multiplex tertia non excedat multiplicem quarta.* Tabul. IV. Fig. 24.

Habeat AB ad C maiorem proportionem, quàm D ad E. Dico fieri poſſe, quod proponitur. Quoniam AB ad C maiorem rationem habet quàm D ad E. Ergo *a* aliqua quantitas minor, quàm prima AB, eandem rationem habebit ad ſecundam C, quàm tertia D ad quartam E: vocetur illa AF, & ſumantur quantitatum AF, AB & D æquè multiplices MI, MK & N, hac lege, vt KI, earum differentia, maior ſit, quàm C. Poſtea ſumantur æquè multiplices RS ipſius C & X alterius E, hac tamen lege, vt RS ſit minima omnium, excedentium ipſam MI, ita vt exceſſus ſit minor, aut æqualis vni eius parti RV, ſeu C; ideoque exceſſus ipſius RS, ſupra MI erit minor, quàm IK, quæ maior facta eſt, quàm C: vnde MK maior erit, quàm RS & MI minor eadem RS. Oſtendendum modo eſt in hiſce æquè multiplicibus, quòd dùm MK maior eſt ipſa RS, ipſam

a prop. 5. hu.

N,

N, aut æqualem, aut minorem eſſe ipſa X. Quoniam, vt AF ad C, ita eſt D ad E, & ſumptæ ſunt duæ MI & N æquè multiplices ipſarum antecedentium AF & D, nec non duæ RS & X æquè multiplices conſequentium C & E. Ergo *b* vt MI ad RS, ita eſt N ad X. Quare *c* ſicut M I minor eſt, quàm RS, ita N minor erit, quàm X: fuit autem oſtenſa MK maior, quàm RS. Igitur quando MK maior eſt, quàm RS, non eſt N maior, quàm X. Quod erat propoſitum.

b *ex prop. 19 huius.*
c *Corol. prop. 16 huius.*

PROPOSITIO XXVII. *Si fuerint quatuor quantitates & antecedentium æquè multiplicia ab æquè multiplicibus conſequentium, qualiſcumque ſit hæc multiplicatio vtrunque, ab vtroque, vel vnà deficiunt, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà excedunt, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent: erunt illæ quatuor quantitates proportionales.* Tab. IV. Fig. 25.

EVCL. *Def. 6. V.*

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & ſint E & F quæcunque æquè multiplices antecedentium A & C ex infinitis æquè multiplicibus, quæ aſſignari poſſunt; nec non ſint G & H quæcunque æquè multiplices, ideſt valeant pro infinitis alijs æquè multiplicibus conſequentium B & D; & quotieſcunque E maior eſt, quàm G ſemper

b *prop. 2 huius.*

ſit

ſit F maior, quàm H, & quotieſcunque E æqualis eſt ipſi G ſit pariter F æqualis ipſi H, & in quacunque multiplicatione E minor eſt quàm G, ſemper ſit F minor quàm H. Dico A ad B eandem rationem habere quàm C ad D. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad B, aut maiorem, aut minorem rationem, quàm C ad D: & in quocunque *a* caſu, ſi multiplex E exceſſerit ipſum G, aliquando F non excedet ipſam H, vel ſi F excedit ipſam H in aliqua multiplicatione E non excedet ipſam G, quæ ſunt falſa, & contra hypoteſin. Non ergo A ad B maiorem, aut minorem proportionem habere poteſt, quàm C ad D. Quare *b* A, B, C, & D erunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

*a pr. 26. huius.*

*b Def. 12. hu.*

*Finis Libri tertij.*

# APPENDIX LIBRI III.

*In qua noua forma proportionum theorica demonſtrantur.*

Completa impreſſione horum elementorum hoc ſupplemen um addere decreui, quod in fine lib. tertij apponi poteſt, vel in principio operis immediatè poſt procemium.

Aſſumuntur primo loco eædem 12 definitiones pagina 97. expoſitæ, & præter pronnnciata ſex in pag. 102. exponi debent duo alia.

AXIOM. VII. Si fuerint duę proportiones commenſurabiles ſimiles interſe, & tertia prop-tio maior fuerit vna illarum: erit quoque maior reliqua. Et ſi illa minor fuerit erit quoque minor reliqua.

VIII. Et ſi duæ antecedentes quãtitates prima 3 & tertia 6 fuerint eædem partes conſequentium 2 & 4: inuertendo ſecũda 2 & quarta 4 erunt eædem partes antecedentium 3 & 6. Et coniungendo terminos 3 & 2 népe 5. eædem partes erit ſecundi 2, ac 6 & 4 nempe 10. partes eſt 4. Et diuidendo eoſdem terminos ſcilicet differentia 3 & 2, nempe 1. ad 2. erit vt differentia 6, & 4 nempe 2 ad quartum terminum 4.

PROP. I. T. IV. Fig. 20. Si quantitas A ad B habuerit eandem prop-tionem quam C habet ad D, ſcilicet ex def. 12 pro-tio A ad B non ſit maior, nec minor ratione C ad D, & habeat G ad B atque H ad D quamlibet

S com-

commenſurabilem pro-nem eandem ex infinitis quæ proponi poſſunt. Dico quod G & H ſunt vna maiores, vel vna æquales, vel vna minores antecedentibus A & C. Et è conuerſo.

Si primum verum non eſt ſit G minor A & H non minor quam C. ergo
a def.9. *a* proportio A ad B maior eſt, & proportio C ad D non eſt maior eadem, commenſurabili pro-ne quam G ha-
b def.10 bet ad B, vel H ad D. & ideo *b* A ad B maiorẽ pro-nem habebit quam C ad D: quod repugnat hypotheſi. igitur quando G minor eſt quam A eſt impoſſibile vt H ſit æqualis, aut maior C. Simili progreſſu oſtendetur quod exiſtente H minore quam C non erit G æqualis aut maior quam A. quapropter G ipſa A & H ipſa C vna minores, vel vna æquales, vel vna maiores erunt.

Secundo poſitis 4 quantitatibus quarùm pro-tio ignoratur. ſupponantur G & H habere eandem, ſed quamcumque pro-nem commenſurabilem conſequentibus B & D, & quotieſcumque G minor eſt prima A ſit quoque H minor tertia C, & ſi G æqualis fuerit A ſit H æqualis C, & quoties G maior eſt A ſit etiam H maior quam C. Dico A ad B eandem pro-nem habere quam C habet ad D.

Hoc demonſtratur vt in 23 prioris methodi. Fol. 136.

PRO-

PROP. II. *Tab. III. fig. 36.* Æquales quantitates A & B ad eandem C, habent eandem pro-nem; & eadem ad æquales.

Sit D quælibet partes ipſius C, ſcilicet repræſentet infinitas proportiones commenſurabiles. Quia A & B ſupponuntur æquales, ergo quotieſcúq; eadem quantitas D æqualis eſt ipſi A erit quoque æqualis B; & ſi D minor eſt A erit etiam minor quã B, & quoties D maior eſt A erit eadem D maior quam B. igitur *a* A ad C eandem proportionem habet quam B ad eandem C. *a hui. 1.*

Secundo ſit quælibet D commenſurabilis ipſi A, habebit *b* D ad æquales A & B quamlibet eandem pro-nem commenſurabilem; eſtque D minor, vel æqualis aut maior eadem C, quæ repreſentat primam & tertiam, ſcilicet duas antecedentes. ergo *c* proportio C ad A eadem eſt quam C ad B. Quod &c. *b axi. 4* *c hui. 1.*

PROP. III. *Si duæ quantitates A B, CD quarum quantitatum E, F fuerint æquè multiplices vel eædem partes ipſarum M & N: erunt viciſſim AB ipſa CD, & E ipſa F, & M ipſa N maiores, aut vna æquales, vel vna minores.*

Demonſtratio erit eadem qua in prop. 1. prioris methodi vſi ſumus. fol. 104.

PROP. IV. Inæqualium quantitatum AB & C maior AB ad ean-

dem D maiorem proportionem habet quam minor C. Et eadem D ad maiorem AB habet minorem pro-nem quam ad minorem C.

Demonſtratur vt in 2. prioris methodi. fol. 106.

PROP. V. Ad eandem quantitatem C rationem habentium, A quæ maiorem pro-nem habet, maior erit quam B, quæ habet minorẽ pro-tionem ad eandem: Et A ad quam eadem C minorem proportionem habet maior erit.

Demonſtratur vt in 5. prioris methodi. fol. 111.

PROP. VI. Si A ad C ſit vt B ad eandem C. Dico A fore æqualem B; & ſi eadem C ad A atque ad B habuerit eandem proportionem, erunt A & B interſe æquales.

Demonſtratur vt in 4 prioris methodi. 110.

PROP. VII. *Tab. VIII. Fig. 13.* Si A ad B fuerit vt C ad D, & pro-tio A ad B eſt maior ratione F ad K. Dico C ad D maiorem quoque rationem habere quam F ad K, & ſi, minor rerit vtraque minor.

Quia A ad B maiorem pro-nem habet quam F ad K. ergo a pro-tio A ad B maior eſt & pro-tio F ad K non maior erit eadem commenſurabili pro-ne quam L habet ad B, & O ad K; & ideo L minor erit quam A, & O non minor erit quam F. Sitque N eædem partes ipſius D ac L

*a def. 10*

par-

partes eſt ipſius B, ſiue O ipſius K. ergo N b minor eſt ipſa C, ſicuti L minor eſt ipſa A. quare pro-tio C ad D maior eſt, & pro-tio F ad K non eſt maior eadem commenſurabili pro-ne quam N habet ad D, ſiue O ad K; & ideo c C ad D maiorem pro-nem habet quam F habet ad K. Quod &c. b bni. 1 c def. 10

PROP. VIII. *Tab. III. Fig. 39.* Si proportiones A ad B, & C ad D eædem fuerint vni tertiæ F ad K: erunt eædem interſe.

Sumantur quantitates L, N, O habentes quaſlibet ſed eaſdem pro-nes commenſurabiles ad conſequentes B, D, K. Et quia pro-tio A ad B ponitur eadem ac F ad K. ergo a duæ L & O pro-les commenſurabiles conſequentibus erunt vna maiores, vel vna æquales, vel vna minores antecedentibus. eadem ratione N & O erunt vna maiores, aut æquales, vel vna minores antecedentibus. igitur L & N erunt vna maiores vel vna æquales, aut vna minores antecedentibus A & C; & erant L, N quælibet commenſurabiles proportionales conſequentibus. ergo b vt A ad B ita eſt C ad D. Quod &c. a bni. 1 b eadem

PROP. IX. *Tab. VIII. Fig. 14.* Si prima A ad ſecundam B eandem pro-nem habuerit quam tertia C ad quartam D. Dico quod *inuertendo* B ad A eſt vt D ad C.

Ponantur E & H quælibet & eæ-

dem partes conſequentium B & D. *a* erunt E & H vna maiores, aut æquales, vel vna minores antecedentibus A & C. & inuersè *b* B ipſius E & D alterius H erunt eædem partes. Intelligantur poſtea L ipſius A & N alterius C eſſe eaſdem partes ac eſt B ipſius E, vel D alterius H: & *c* ſiquidem E maior eſt A erit B maior L; pariterque H ipſa C, & D ipſa N maiores erunt; non ſecus ſi E & H minores fuerint quam A & C, erunt quoque B, D minores L & N, & ſi illæ æquales hæ quoque æquales erunt. Cumque L, N ſint quælibet & eædem partes conſequentium A & C & ſunt vna maiores, æquales, vel vna minores antecedentibus B & D. igitur *d* B ad A erit vt D ad C. Quod &c.

*a huI.1. par.2.*
*b axi.8*
*c hui.3.*
*d hui.1 par.1.*

PROP. X. Si quatuor quantitatum eiuſdem generis AB ipſius F, & CD alterius F æquè multiplices fuerint; & E ipſius F, vel ſolummodo AB ipſius CD multiplex ſupponatur: erit viciſſim reliqua æquè multiplex alterius.

Demonſtratur in 10 prioris methodi pag. 117.

PROP. XI. *Tab. IV. Fig. 16.* Si quantitas A ad B fuerit vt C ad D. Dico viciſſim A ipſa C, & B ipſa D vna æquales, vel vna maiores, aut vna minores eſſe. Et ſi præterea E ad eandem B fuerit vt F ad eandem D. Dico A ipſa E, & C ipſa F vna maiores

iores, vel æquales, aut minores eſſe.

Si primum verum non eſt ſit vna antecedentium A maior C, & B non maior D. ergo *a* A ad B maiorem pro-nem habet quam C ad eandem B; poſtea eadem C ad B eandem aut maiorem pro-nem habebit ad D, cum B. ponatur non maior D. igitur A ad B maiorem pro-nem habet quam C ad D. quod eſt contra hypotheſim. non ergo A eſſe poteſt maior C & B non maior quam D. Simili modo oſtendetur quod C non poteſt eſſe maior A & D non maior B, quare quotieſcumque A maior eſt ipſa C erit quoque B maior reliqua D; & quoties A minor eſt C erit B minor D, & ſi æqualis, etiam æqualis erit.

*a huí. 5 et 2.*

In ſecunda hypotheſi exiſtente A maiore quam E habebit *b* A ad eandem B maiorem pro-nem quam E ad ipſammet B, eſtq; F ad D vt E ad B. ergo *c* A ad B maioré pro-nem habet quam F ad D, & erat C ad D vt A ad B. igitur *d* C ad D maiorem rationem habet quam F ad eandem D. Et ideo *e* C maior quoq; eſt quam F. eodem progreſſu exiſtente A minore quam E, oſtendetur C minor F. Quare &c.

*b huí. 5*
*c huí. 7*
*d eadē*
*e huí. 5.*

PROP. XII. *Tab. IV. Fig.* 4. Si A & C æquè multiplices fuerint ipſarum B & D. Dico A ad C eandem pro-tionem habere quam B ad D.

Sumantur E & H quælibet eædem partes ipſarum G & D, quarum com-

munes

munes menſuræ eædem ſint R, S. Quia R, S ſunt eadem pars ipſarum
a *hu*.10 C, D eſtque D pars ipſius C. ergo *a* S eadem pars eſt ipſius R, quam D pars eſt alterius C. eadem ratione H ipſius E eadem pars erit quam S ipſius R, ſeu D ipſius C, vel B
b *hui*.8 ipſius A. quare *b* A ad B erit vt E
c *hui*.11 ad H; & ideo *c* E & H erunt vna maiores, aut æquales, vel vna minores antecedentibus A, & B; & ſunt quælibet eædem partes conſe-
d *hui*.1 quentium C, D. ergo *d* A ad C erit vt B ad D. Quod &c.

PROP. XIII. *Tab. IV. Fig.* 4. Si A ad B fuerit vt C ad D eiuſdem generis cum prioribus. Dico *permutando* A ad C eandem pro-tionem habere quam B ad D.

Sumantur E & H quælibet eædem partes ipſarum C, D, quarum communes menſuræ eædem ſint R, S. erit C ad D vt pars R ad S. ſimiliter vt R
a *hu*.12 ad S ita erit E ad H, ſeu C ad D, vel A
b *hui*.11 ad B. ergo *b* E & H erunt vna æquales, vel minores aut vna maiores antecedentibus A & B; & erant E, H eædem & quælibet partes conſequē-
c *hui*.1 tium. igitur *c* A ad C eſt vt B ad D. Quod &c.

PROP. XIV. *Tab. IV. Fig.* 6. Si AB ad BC fuerit vt DE ad EF. Dico quod *diuidendo* differentia terminorum AC ad eandem conſequentem BC eſt vt differentia DF ad EF.

Sumantur duæ quantitates GB &

HE

·HE quæ ſint quælibet eædem partes conſequentium CB & FE, quarum communes menſuræ eędem ſint K, N. quare *a* K, N æquè metientur antecedentes GB, HE, nec non conſequentes CB & FE; & proinde *b* K & N æquè metientur earundem differentias GC & HF. quapropter GC ipſius CB eædem & quælibet partes erit ac HF partes eſt ipſius EF. & quia ex hypotheſi AB ad BC erat vt DE ad EF, & ſumptæ fuerunt GB ipſius BC, nec non HE alterius EF eadem quælibet partes. ergo *c* GB ipſa AB, atquè HE ipſa DE vnà minores, æquales, aut vnà maiores erunt, & ablatis communibus CB, & FE, quotieſcumque GC minor eſt ipſa AC erit quoque HF minor DF, & quoties GC maior eſt quam AC erit HF maior DF, aut vnà æquales. Cumque ſint quatuor quantitates, AC, CB, DF, FE, & duæ aliæ GC, HF ſint quælibet eædem partes conſequentium CB, & FE quæ ſunt vnà minores, æquales, vel vnà maiores antecedentibus AC, & DF. igitur *d* AC ad CB ſe habet vt DF ad FE. Quod &c.

a *def.* 6. b *axi.* 8 c *hui.* 1. d *eadem*

PROP. XV. *Tab. IV. Fig.* 6. Si AC ad CB fuerit vt DF ad FE. Dico quod *componendo* ſummæ terminorum ad eaſdem conſequentes proportionales ſunt, ſcilicet AB ad BC erit vt DE ad EF.

Intelligatur *a* HE ad EF habere eam-

a *axi.* 8

eandem pro-tionem quam AB habet ad BC. ergo diuidendo *b* AC ad C B erit vt HF ad FE; & erat DF ad FE vt AC ad CB. igitur *c* HF & D F ad eandem FE habent eandem pro-tionem, & proinde *d* HF æqualis eſt DF; & addita communi FE erit HE æqualis DE; ideoque *e* DE ad EF erit vt HE ad EF, ſeu *f* quam AB ad BC. Quod &c.

b *hu.*14
c *hui.*8
d *hui.*6
e *hui.*2
f *hui.*8.

PROP. XVI. Si quantitatum aggregata fuerint interſe vt ablatæ portiones: erunt reſiduæ vt agregata. Et è conuerſo.

Demõſtratur vt in 15. prioris methodi. pag. 126.

PROP. XVII. Si quantitates eiuſdem generis pro-nales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

Demõſtratur vt in 16. prioris methodi. pag. 120.

PROP. XVIII. Si commenſurabilibus pro-tionibus ſimilibus addãtur aliæ ſimiles pro-nes commenſurabiles: component pro-nes commenſurabiles ſimiles.

Demonſtratur in 17. pag. 127.

PROP. XIX. *Tab. IV. Fig.* 12. Si quantitas A ad B fuerit vt C ad D, & B ad E eandem commenſurabilem pro-nem habuerit quam D ad H. Dico quod *compoſita* pro-tiones A ad E & C ad H eædem erunt.

Ponantur N ipſius E & O ipſius H eædem & quælibet partes; & *a* inuer-

a *axi.*8

uertendo eſt E ipſius B, atque H alterius D eædem partes. ergo *b* N ipſius B eædem partes erit ac O partes eſt alterius D; poſita autem fuit A ad B vt C ad D. igitur *c* N & O vna maiores, aut æquales, vel vna minores erunt antecedentibus A & C; & fuerunt N, O quælibet eædem partes conſequentium E & H. ergo *d* A ad E eſt vt C ad H. Quod &c.

b *hu.* 18
c *hui.* 1.
d *eadē*

PROP. XX. *Tab. IV. Fig.* 13, 14.

Si pro-tionibus ſimilibus A ad B, & C ad D addantur duæ aliæ ſimiles pro-tiones B ad G vt D ad H. Dico quod compoſitæ proportiones A ad G & C ad H eædem ſunt. quæ ex *æquali ordinatè* vocentur.

Ponātur K ipſius G, & N ipſius H eædem & quelibet partes; & ideo *a* G ipſius K & H alterius N eædem partes erunt: eſtque B ad G vt D ad H. ergo *b* B ad K erit vt D ad N, & inuertendo *c* K ad B erit vt N ad D; & erat quoque A ad B vt C ad D. igitur *d* K & N erunt vna maiores, vel æquales, aut vna minores ipſis A & C; erant autem K & N quælibet eędem partes ipſarum G & H. ergo *e* A ad G eandem proportionem habet quam C ad H.

a *axi.* 8
b *hu.* 19
c *hui.* 9
d *hu.* 11 *par.* 2.
f *hui.* 1.

Similiter ſi eiſdem compoſitis ſimilibus pro-tionibus addantur eodem ordine ſimiles pro-nes G ad S vt H ad R oſtendetur quod primā ad tertiam S poſt ſecundam G erit vt C ad R. Quod &c.

PRO-

PROP. XXI. Si pro-tionibus ſimilibus A ad B, & C ad D addantur perturbato ordine aliæ pro-nes ſimiles B ad E, & F ad C. Dico quod compoſitæ pro-tiones A ad E, & F ad D eædem ſunt.

Demonſtratur vt in 20. prioris methodi fol. 133.

PROP. XXII. Si ex pro-nibus ſimilibus A ad B, & C ad D tollantur ordinatè, vel perturbatè aliæ ſimiles pro-tiones A ad E & C ad F. Dico reſiduas pro-nes E ad B & F ad D ſimiles eſſe.

Demonſtratur vt in 21. prioris methodi fol. 134.

PROP. XXIII. Si A ad B fuerit vt C ad D; & F ad eandem B ſit vt H ad eandem D. Dico quod duæ antecedentes A, F ſimul ſumptæ ad eandem B habent eandem proportionem, quam C, H ſimul ſumptæ ad eandem conſequentem D.

Demonſtratur vt in 22. prioris methodi fol. 135.

PROP. XXIV. Si fuerint quatuor quantitates AB, C, D, F & binæ aliæ H & O pro-tionales conſequentibus C, & F, ſint vna minores vel vna maiores antecedentibus AB, & D exceſſu, vel defectu à prima AB minori quolibet dato. Dico quod illæ quatuor quantitates ſunt pro-les

Demõſtratur vt in 24 prioris methodi fol. 137. & ſic reliquæ vſque ad pro-nem 27. eiuſdem libri 111.

## *De Spatijs proportionalibus.*

## DEFINITIONES.

*RECIPROCA triangula, vel parallelogramma ſunt, cùm duo latera circa angulum vnius fuerint duo extrema, & duo latera circa angulum alterius figura fuerint duo media quatuor proportionalium.* Tabula IV. Fig. 26. I.

Vt duo triangula ABC, DEF, vel duo parallelogramma BG, EH erunt reciproca, ſi fuerit AB ad ED, vt FE ad CB: Hac enim ratione angulus B parallelogrammi BG, vel trianguli ABC continebitur à prima AB, & quarta CB; & angulus E parallelogrammi EH, vel trianguli DEF continebitur à ſecunda DE & tertia EF, quatuor proportionalium.

*PARALLELOGRAMORVM ſecundum aliquam rectam lineam applicatorum illud deficere dicitur, quod non occupat totam lineam: Excedere verò quando occupat maiorem lineam rectam, quàm ſit ea, ſecundum quam applicatur: Exceſſus verò, vel defectus dicitur pars, vel productio eiuſdem applicati parallelogrammi, quod ſuper defectum, aut exceſſum lineæ ſuppoſita deſcriptum eſt.* Tabula IV. Figura 27. II.

Vt parallelogrammum AD applicatum ſuper rectam AB, dicitur deficiens, quando eius latus AC non occupat totam lineam AB. Et dicitur excedens, quando AC maius eſt, quàm AB. Diciturque defectus in primo caſu, vel exceſſus in ſecundo, ipſum parallelogrammum CH.

III. *SI ab eodem puncto diametri parallelogrammi ductæ fuerint duæ rectæ parallelæ lateribus ipſius: parallelogramma, quæ à diametro biſſecantur, vocentur circa diametrum conſtituta; & duo illa parallelogramma quæ à diametro non biſſecantur; vocentur parallelogramma complementi.* Tabula IV. Fig. 28.

Vt ſi in parallelogrammo BD per punctum O, in eius diametro AC aſſumptum, ducantur duæ rectæ, HOG quidem parallela lateri DC, ſeu AB; atque FOE parallela lateri CB, vel DA: vocentur parallelogramma BD, HF, atque EG circa diametrum conſtituta; atque duo parallelogramma DO, & BO, quæ à diametro non biſſecantur: appellentur parallelogramma complementi.

EVCL. I VI. PROPOSITIO I. *Triangula, & parallelogramma æquè alta ſunt inter ſe, vt baſes. Et, ſi fuerint inter ſe vt baſes, æquales altitudines habebunt*

*bebunt.* Tab. IV. Fig. 29. 30.

Sint primò duo triangula ABC, DEF æquè alta, ſeu inter eaſdem parallelas AK, BF. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF habere eandem rationem, quam baſis BC ad baſim EF. Secetur *a* EF in quancumque multitudinem partium æqualium, quarum vna ſit EI, & in CB ſumatur SC, quæ ſit quælibet multiplex ipſius EI: erit *b* SC ipſius EF quælibet partes, & coniungantur SA, ID. Quoniam *c* quoties baſis EI metitur baſim EF, toties triangulum EID metitur æquè altum triangulum DEF, & quoties *d* EI metitur CS, toties triangulum DEI, metitur æquè altum triangulum ASC. *e* Ergo triangulum ASC quælibet & eædem partes eſt trianguli DEF, quemadmodum SC eſt partes alterius EF. Sunt ergo quatuor magnitudines, prima BC, ſecunda EF, tertia triangulum ABC, quarta triangulum DEF, & duæ aliæ, ſcilicet baſis SC, & triangulum ASC ſunt quælibet, & eædem partes conſequentium EF, & trianguli DEF, ideſt *f* ad eas habent quamlibet, & eandem rationem commenſurabilem; & quoties SC eſt æqualis primæ BC, *g* neceſſariò triangulum ASC æquale erit tertiæ, ſcilicet triangulo ABC; & quoties cumque SC maior eſt, quam

a prop. 28. lib. 1

b Def. 3. lib. 3

c ex pr. 32. lib. 1

d ex pr. 32. lib. 1

e Def. 6 lib. 3.

f Def. 8 lib 3.

g prop. 32. lib. 1

*h ex pr. 32. lib. 1* BC, toties *h* ASC maius eſt, quàm ABC, & cùm SC minor eſt, quàm BC, ſemper ASC minus erit, quàm ABC. Ergo *i* prima BC ad ſecundam EF eandem rationem habet, quam tertia ABC triangulum, ad quartam magnitudinem, triangulum DEF. Quod erat oſtendendum.

*i prop. 23. lib. 3*

Secundò ſint parallelogramma BH, EK eiuſdem altitudinis. Dico proportionalia eſſe baſibus. Ductis diametris AC, DF; erunt triangula ABC, DEF æquè alta; & ideo *l* inter ſe erunt, vt baſes BC, EF; ſed *m* vt triangulum ABC ad triangulum DEF, ita duplum ad duplum, ideſt *n* parallelogrammum BH ad parallelogrammum EK. Ergo *o* parallelogrammum BH ad parallelogrammum EK, erit vt baſis BC ad baſim EF. Vt erat probandum.

*l ex prima parte huius*
*m prop. 11. lib. 3*
*n prop. 16. lib. 1*
*o prop. 7. lib. 3*

Tertio ſit triangulum ABC ad triangulum DEF, ſeu parallelogrãmum BH ad parallelogrammum EK, vt baſis BC ad baſim EF. Dico altitudines triangulorum ſeu parallelogrammorum æquales eſſe. Si hoc verum non eſt, ipſi DEF æquè altum ſecetur ſpatium MBC maius, aut minus, quàm ABC: Ergo *p* erit MBC ad DEF, vt baſis BC ad baſim EF; Erat autem, vt BC ad EF, ita ABC ad DEF. Ergo *q* M BC

*p ex prima par-*
*q prop. ... lib. 3.*

BC & ABC eandem rationem habent ad idem ſpatium DEF; ideoque *r* MBC & ABC æqualia ſunt, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alia altitudo, quàm ipſius ſpatij ABC æqualis eſt altitudini ſpatij DEF. Vnde patet propoſitum. *r prop. 4 lib. 3.*

Facili negotio ex hac propoſitione deducuntur tres primæ propoſitiones, quæ in ſecundo libro ſatis prolixè demonſtrauit Euclides.

Sit primò recta linea A inſecta, & BC ſecta ſit in D. Dico parallelogrammum rectangulum ſub A & BC comprehenſum, (ideſt cuius baſis eſt BC, altitudo A circa angulum rectum) æquale eſſe rectangulis parallelogrammis ſub A & BD, atque ſub A & DC contentis. Quoniam hæc omnia parallelogramma rectangula ſunt æquè alta, cùm habeant communem altitudinem menſuratam à recta A. Ergo *ſ* erunt inter ſe, vt baſes; ſed baſes BD, DC, ſimul ſumptæ, æquales ſunt baſi BC. Ergo *t* rectangula ex BD in A, & ex DC in A, ſimul ſumpta æqualia ſunt rectangulo ex baſi BC in altitudine A ducta. Quod erat probandum. EVCL. 1. II. *ſ prop. 1 huius, & prop. 22. lib. 3* *t Corol. 1. prop. 16 lib. 3*

Secundò ſupponatur inſecta A æqualis totæ BC, erit eadem ratione, parallelogrammum ex A in BC, ſeu ex BC in CB, ideſt *u* quadra- EVCL. 2. II. *u prop. 34. lib. 1*

dratum ipſius BC, æquale duobus rectangulis ex A, ſeu BC in BD, & ex BC in CD ſimul ſumptis.

Tertiò ſupponatur ʼinſecta A æ-
EVCL. 3. II. qualis ſegmento DC, erit rurſus ſpa-
rallelogrammum ex A, ſeu DC in CB æquale duobus rectangulis ex A, ſeu CD in BD, & ex DC in DC, ſeu *x* quadrato ipſius DC.

*x prop. 34. lib. 1*

EVCL. 2. VI. PROPOSITIO II. *Recta linea parallela baſi trianguli ſecat proportionaliter eius latera. Et recta, ſecans proportionaliter latera trianguli, parallela eſt eius baſi.* Tabula IV. Fig. 32.

Sit triangulum ABC & DE recta parallela baſi BC ſecet eius latera in D & E. Dico BD ad DA eſſe in eadem ratione, ac CE ad EA. Coniungantur rectæ DC, EB. Quoniam duo triangula DBE, ECD eandem baſim DE habent, & ſunt inter parallelas DE, BC. Ergò *a* æqualia inter ſe ſunt, & ideo *b*
*a prop. 32. lib. 1* ad idem triangulum ADE eandem
rationem habent: ſed *c* triangulum
*b prop. 3. lib. 5* BED ad triangulum DEA eandem
*c prop. 1 huius.* rationem habet, quam baſis BD ad baſim DA (eò quod perpendicularis, à puncto E ſuper rectam AB, communis altitudo eſt triangulorum
*d prop. 7. lib. I* DEB, DEA). Ergo *d* triangulum
*e prop. 11. huius* DCE ad triangulum DAE eſt, vt

BD

BD ad DA. *e* Rurſus cùm triangulum CDE ad triangulum EDA ſit, vt baſis CE ad baſim EA, quia ſunt eiuſdem altitudinis. Ergo, *f* vt B D ad DA, ita eſt CE ad EA. Quod erat primò oſtendendum. *f prop. 7 lib. 3.*

Secundò ſit BD ad DA, vt CE ad EA. Dico DE parallelam eſſe baſi BC. Si hoc verum non eſt, ſit *g* EH parallela baſi BC; Ergo, *h* vt CE ad EA ita erit BH ad HA: erat autem, vt CE ad EA, ita BD ad DA; Ergo, *i* vt BH ad HA, ita eſt BD ad DA. Et componendo *l* erit BA ad AD, vt BA ad AH. Quare *o* AD & AH æquales erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo EH, ſed ipſa ED parallela eſt baſi BC. Quod erat probandum. *g corol. prop. 16. lib. 1. h ex prima parte huius i Prop. 7. lib. 3 l prop. 14 lib. 3 n prop. 13. lib. 3 o prop. 4. lib. 3*

PROPOSITIO III. *Recta linea, ſecans biſariam angulum verticis trianguli, ſecabit baſim in eadem ratione laterum, ita vt homologa ſint conterminalia. Et, ſi baſis ſegmenta diſſecta ſint in eadem ratione laterum, erit ſectus biſariam angulus verticis.* Tabula IV. Fig. 3. EVCL. 3. *VI.*

In triangulo ABC recta AD efficiat angulos DAB, DAC æquales inter ſe. Dico BD ad DC eſſe, vt BA ad AC. Producta CA, vt fiat *a* EA æqualis BA, & iungatur EB. *a prop. 3. lib. 1*

G 4 Quo-

b *prop. 6. lib. 1.* Quoniam *b* anguli E & ABE, oppoſiti lateribus æqualibus BA, EA ſunt inter ſe æquales; Ergo *c* externus angulus CAB duplus eſt anguli ABE: ſed angulus CAB duplus eſt etiam anguli DAB; Ergo duo anguli DAB & EBA (alterni) æquales ſunt; & ideo *d* AD parallela eſt EB, baſi trianguli CEB. Quare *e* BD ad DC eſt, vt EA ſeu *f* ei æqualis BA, ad AC. Vt erat probandum.

c *prop. 18.*

d *prop. 16. lib. 1*

e *prop. 2 huius.*

f *prop. 3 lib. 3.*

Secundò ſit BD ad DC, vt BA ad AC. Dico rectam DA ſecare bifariam angulum BAC. Si hoc verum non eſt, alia recta HA ſecet angulum BAC bifariam. Iam, *g* vt BA ad AC, ita erit BH ad HC: erat autem, vt BA ad AC, ita BD ad DC; Ergo *h* vt BH ad HC, ita eſt BD ad DC; & componendo *i* BC ad HC erit, vt BC ad CD; ideoque *l* CH & CD æquales ſunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo aliqua alia recta præter DA ſecat bifariam angulum CAB. Quod erat oſtendendum.

g *prima par. hu.*

h *prop. 7. lib 3.*

i *prop. 14. lib 3*

l *prop. 4 lib. 3.*

EVCL. 4. VI. PROPOSITIO IV. *Triangulorum inter ſe æquiangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et homologa ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Vocentur autem huiuſmodi triangula* Similia inter ſe. Tab. IV. Fig. 34.

In

In triangulis ABC, DEF ſint duo anguli A & D æquales inter ſe; pariterque duo anguli B & E æquales; vnde *a* tertij anguli C & F æquales erunt, cùm ſint complementa ad duos rectos in vtroque triangulo. Dico eſſe AB ad BC, vt DE ad EF & BC ad CA, vt EF ad FD, atque CA ad AB, vt FD ad DE (hoc enim modo homologa latera, ideſt antecedentia proportionalitatis, ſubtendunt angulos æquales). Secentur *b* GB æqualis DE & NC æqualis DF; & ducantur *c* GH quidem parallela AC, atque NK parallela AB. Quoniam eidem angulo A æqualis eſt D ex hypotheſi, & BGH propter parallelas GH, AC, *d* æqualis eſt eidem A. Ergo anguli BGH & D æquales ſunt, & erant æquales anguli B & E, atque ſubiacentia latera GB, DE æqualia erant. Ergo *e* BH æqualis eſt EF. Eodem modo in triangulo NKC erit KC æqualis EF. Poſtea quia GH parallela eſt AC. Ergo *f* AB ad BG erit, vt CB ad BH: & permutando *g* AB ad BC erit, vt GB ad BH; ſuntque GB, BH æquales ipſis DE, EF. Ergo, *h* vt AB ad BC, ita eſt DE ad EF. Rurſus *i* propter parallelas AB, NK erit BC ad CK, vt AC ad CN; & permutando *l* BC ad CA erit, vt KC ad CN, ſeu, *m* vt EF ad FD

*a ex pr. 18. lib. 1*

*b prop. 3. lib. 1.*

*c Corol. prop. 16 lib. 1.*

*d prop. 15. lib. 1*

*e prop. 25. lib. 1*

*f prop. 2. huius.*

*g prop. 12 lib. 3*

*h prop. 7. lib. 3*

*i prop. 2 huius.*

*l prop. 12. lib. 3*

*m prop. 3. lib.*

G 5 (cùm

( cùm hæ æquales ſint illis ; ) cùmq; AB ad BC ſit , vt DE ad EF , & BC ad CA ſit , vt EF ad FD . Ergo , *n* ex compoſitione ordinata , erit AB ad AC , vt DE ad DF . Quod erat probandum .

*n prop. 19 lib. 3*

EVCL. 5. VI. **PROPOSITIO V.** *Si duo triangula latera proportionalia habuerint , erunt æquiangula inter ſe .* Tabula V. Fig. 35.

In triangulis ABC , DEF ſit AB ad BC , vt DE ad EF & BC ad CA ſit , vt EF ad FD , atque CA ad AB ſit , vt FD ad DE . Dico triangula eſſe æquiangula . Fiat *a* angulus HBC æqualis angulo E , & angulus HCB fiat æqualis angulo F : Efficietur *b* ergo tertius angulus H æqualis angulo D . Quare in triangulis æquiangulis BCH , EFD erit *c* HB ad BC , vt DE ad EF ; ſed AB ad BC erat , vt DE ad EF . *d* Ergo HB & AB ad BC eandem rationem habent ; ideoque *e* HB & AB æquales inter ſe ſunt . Eadem ratione HC æqualis erit AC ; & eſt BC baſis communis . Ergo *f* anguli A & H æquales inter ſe erunt ; erat autem angulus D æqualis angulo H . Ergo duo anguli A & D æquales inter ſe ſunt . Eadem ratione anguli ABC & E æquales inter ſe erunt . Quare triangula ABC , DEF æquiangula ſunt . Quod erat oſtendendum .

*a prop. 24 lib. 1*
*b ex pr. 28. lib. 1*
*c prop. 4 huius .*
*d prop. 7 lib. 3.*
*e prop. 4. lib. 3*
*f prop. 7 lib. 1.*

PRO-

PROPOSITIO VI. *Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, & circa æquales angulos latera fuerint proportionalia; triangula erunt ſimilia.* Tabula IV. Fig. 36. EVCL. 6. VI.

In triangulis ABC, DEF ſint anguli A & D æquales, &, vt BA ad AC, ita ſit DE ad DF. Dico triangula eſſe ſimilia. Secetur *a* A *a prop. 3. lib. 1*
G æqualis DE. & AH fiat æqualis DF, & coniungatur GH; cùmque anguli A, D æquales ſint, erunt *b* *b prop. 4. lib. 1*
duo triangula AGH, DEF æqualia, æquiangula, & æquilatera inter ſe; Eſt verò BA ad AC, vt ED ad DF, ſeu *c* vt GA ad AH. (propter *c prop. 3 lib. 3.*
æqualitatem). Ergo *d* permutando B *d prop. 12. lib. 3*
A ad AG erit, vt CA ad AH ideoq; GH parallela erit ipſi BC: Vnde *f* *e prop. 2. huius*
angulus B æqualis erit angulo AGH ſed eidem angulo AGH æqualis *f prop. 15. lib. 1*
erat angulus E. Ergo anguli B & E æquales inter ſe erunt: Erant autem prius anguli A & D æquales. Ergo *g* triangula ABC, DEF inter ſe æquiangula, & *h* ſimilia ſunt. Quod erat oſtendendum. *g ex pr. 4. lib. 4 h prop. 4 huius.*

PROPOSITIO VII. *Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, ita vt homologa ſint parallela; & anguli ab eis comprehenſi ſint eiuſdem ſpeciei; erunt triangula ſimilia, & baſes pa-* EVCL. 32. VI.

*rallela, vel in directum poſita. Aut ſi tria latera tribus lateribus parallela fuerint ſingula ſingulis, erunt triangula ſimilia.* Tab. IV. Fig. 37.

In duobus triangulis ABC & DEF ſit primò BA ad AC, vt ED ad DF, ſintque BA & DE æquidiſtantes, pariterque æquidiſtent AC, DF; & duo anguli A & EDF ſint ambo acuti, vel ambo obtuſi. Dico triangula ABC & DEF ſimilia eſſe, & baſes BC, EF parallelas eſſe, aut in directum poſitas. Quoniam duæ rectæ AB, DE ſe mutuo ſecant in G; & duæ rectæ AC, DF ſunt parallelæ ergo *a* angulus A eſt æqualis angulo AGF & ob parallelas AB, DE erit angulus EDF æqualis eidem angulo AGF & ideo anguli A, & EDF æquales erunt inter ſe (cum ſint eiuſdem ſpeciei) & circa hos angulos æquales latera ſunt proportionalia. ergo *b* triangula ABC, DEF ſunt æquiangula; & erant homologa latera AB, DE parallela. igitur *c* baſes BC, EF parallelæ quoque ſunt, vel in directum poſitæ.

*a prop. 15. lib. 1.*

*b prop. 6 huius.*

*c prop. 15. lib. 1.*

Secundò ſint AB, DE æquidiſtantes, pariterque AC, DF æquidiſtent, nec non BC & EF ſint parallelæ. Dico rurſus triangula ABC, DEF eſſe ſimilia. nam oſtendetur vt prius quod bini quique anguli B & DEF à parallelis conprehenſi

ſi æquales ſunt interſe, & erant anguli A, & EDF æquales. ergo triangula ABC, DEF ſimilia erunt. quod erat &c.

PROPOSITIO VIII. *Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, & duo anguli, homologis lateribus oppoſiti, æquales inter ſe; atque duo anguli, reliquis homologis oppoſiti, ſint eiuſdem ſpeciei: erunt triangula ſimilia inter ſe.* Tab. IV. Fig. 38. EVCL. 7. VI.

In triangulis ABC & DEF ſit AB ad AC in eadem ratione, quam ED ad DF; & ſint anguli B & E æquales, qui nimirum opponuntur homologis AC, DF, atque duo anguli C & F, oppoſiti reliquis homologis ſint eiuſdem ſpeciei, ideſt ambo ſint acuti, aut ambo obtuſi: Dico triangula ABC & DEF ſimilia eſſe. Fiat *a* angulus CAH æqualis angulo D; ſeceturque *b* AH æqualis AB, iunganturque rectæ CH & BH. Quoniam *c* æquales BA & HA habent eandem rationem ad eandem AC, eſtque ED ad DF, vt BA ad AC: Ergo AH ad *d* AC eſt, vt ED ad DF; & ſunt anguli CAH & D æquales: Igitur *e* triangula ACH & EDF ſunt æquiangula, & ideo anguli AHC & E æquales ſunt; pariterque anguli ACH & F ſunt inter ſe æquales: Erant ali-

*a prop. 24. lib. 1* *b prop. 3. lib. 1* *c prop 3 lib. 3.* *d prop. 7 lib. 3.* *e prop. 6 huius.*

autem anguli A C B & F eiuſdem ſpeciei: Ergo quando angulus A C B eſt acutus, erit quoque angulus ACH acutus, & quando ille eſt obtuſus, hic quoque obtuſus erit, & propterea duo anguli ACB, & ACH, ſimul ſumpti, aut minores erunt, aut maiores duobus rectis; & ideo *f* duæ rectæ BC & CH in directum non erunt, & proinde efficietur triangulum BCH. Cumque duo anguli ABC & AHC æquales ſint inter ſe, cùm ſint æquales eidem angulo E: *g* pariterque duo anguli ABH; & AHB ſint æquales (cùm latera AB & AH æqualia facta ſint). Ergo compoſiti, vel differentiales anguli HBC & BHC æquales inter ſe erunt; & propterea *h* rectæ BC & HC æquales erunt: ſed facta fuerunt latera AB & AH æqualia, & AC eſt commune. Igitur *i* angulus BAC æqualis eſt angulo HAC; ſed eidem angulo HAC æqualis erat angulus D. Ergo anguli BAC & D æquales ſunt inter ſe. Et poſiti fuerunt anguli ABC & E æquales. Igitur *l* triangula ABC & DEF ſimilia ſunt. Quod erat oſtendendum.

*f prop. 13. lib. 1*

*g prop. 6. lib. 1*

*h prop. 20. lib. 1*

*i prop. 7 lib. 1.*

*l ex pr. 4. huius*

PROPOSITIO IX. *Perpendicularis ab angulo recto trianguli rectanguli ad baſim ducta, diuidit ipſum in duo triangula ſimilia toti, & inter ſe,*

EVCL. 8. VI.

*ſe, & eſt media proportionalis inter baſis ſegmenta, & efficit vtrunque ſegmentum tertium proportionale totius baſis, & lateris dicto ſegmento conterminalis.* Tabla IV. Fignra 39.

In triangulo ABC ſit angulus BAC rectus, & ab A cadat perpendicularis AD ad baſim, ſecans eam in D. Dico triangula BAD, ACD & BCA ſimilia eſſe inter ſe, & AD mediam proportionalem inter ſegmenta BD & DC, atque CB ad BA eſſe, vt AB ad BD, pariterque tres BC, CA, DC eſſe proportionales. Quoniam in triangulis BAC, BDA angulus B eſt communis, & anguli recti BAC, BDA æquales ſunt. Ergo *a* tertius angulus C æqualis eſt angulo BAD; ideoque *b* triangula BAC, BDA ſimilia ſunt, & circa communem angulum B latera CB ad BA erunt in eadem ratione, quam *AB habet ad BD*. Similiter in triangulis CAB, CDA angulus C eſt communis, & duo recti CAB, CDA ſunt æquales. Ergo *c* triangula CAB, CDA ſimilia ſunt inter ſe, & BC ad CA eſt, vt AC ad CD. Tandem in triangulis BAD, ACD duo anguli BAD, & C æquales oſtenſi ſunt, & duo anguli recti BDA, ADC æquales ſunt. Ergo *d* triangula BAD, AC

*a ex pr. 18. lib. 1*

*b prop. 4. huius*

*c ex pr. 4. huius*

*d ex pr. 4. huius*

D ſi-

D ſimilia quoque inter ſe ſunt, & latera circa rectos angulos æquales proportionalia ſunt: Ergo BD ad DA eſt, vt AD ad CD. Sic enim homologa ſubtendunt angulos æquales: & AD media eſt trium continuè proportionalium BD, DA, DC. Quare patet propoſitum.

EVCL. 11. 13. VI. PROPOSITIO X. *Duabus datis rectis lineis, tertiam, vel mediam proportionalem inuenire*. Tabula IV. Fig. 40.

Sint datæ duæ rectæ AB & C, ijs primò reperiri debet tertia proportionalis. Super maiori AB deſcribatur ſemicirculus ADB, & in eo *a* accomodetur BD æqualis C minori & à puncto D cadat *b* perpendicularis DE, ſecans AB in E. Dico BE eſſe tertiam proportionalem quæſitam. Coniuncta recta AD, *c* erit angulus ADB in ſemicirculo rectus, & ab angulo recto ducitur perpendicularis DE ad baſim trianguli rectanguli ADB. Ergo *d* vt AB ad BD, ita eſt DB, ſeu C ad BE; ideoque BE eſt tertia proportionalis quæſita.

a prop. 12. lib. 1
b prop. 11. lib. 1
c prop. 20. lib. 2
d prop. 9. huius

Secundò inter AB, & C reperiri debet media proportionalis. Ex diametro AB *e* ſecetur BE æqualis C, & *f* eleuetur perpendicularis ED, compleaturque *g* triangulum rectangulum ADB: erunt, *h* vt prius,

e prop. 3 lib. 1.
f prop. 10. lib. 1
g prop. 20. lib. 2
h prop. 9 huius.

us, tres AB, BD & BE, ſeu C, continuæ proportionales. Quare BD eſt media quæſita. Vt erat faciendum.

PROPOSITIO XI. *Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.* Tabula IV. Fig. 41. EVCL. 12. VI.

Datis tribus rectis AB, BC & AD, debet reperiri quarta, ad quam AD eandem rationem habeat, quam AB habet ad BC. Continuentur in directum AB, BC & DA efficiat quemlibet angulum cum CA, & iungatur recta BD, atque *a* CE fiat parallela ipſi BD, & ſecet rectam AD, extenſam in E. Dico DE eſſe quæſitam. Quoniam in triangulo CAE ducta eſt BD parallela baſi CE. Ergo, *b* vt AB ad BC, ita eſt AD ad DE. & hoc erat faciendum.

*a Coroll. prop. 16 huius.*

*b prop. 2 huius.*

PROPOSITIO XII. *Datam rectam lineam ſecare ſecundum rationes datas:* Tabula IV. Fig. 42. EVCL. 10. VI.

Data recta linea GE ſecari debet ſecundum proportiones AB ad BC & BC ad CD. Conſtituantur in directum rectæ lineæ AB, BC, CD *a* ponaturque ipſa AD parallela rectæ GE; & à punctis A, D ad terminos G & E coniungantur rectæ lineæ AG & DE. Quæ primò ſint parallelæ inter ſe; & ducantur *b* rectæ BF, CH parallelæ ipſis AG, vel

*a Corol. prop. 10*

*b corol. prop. 16 lib. 1.*

vel DE, ſecantes GE in F & H. Patet e rectam GE ſectam eſſe à parallelis in G, F, H, E in eiſdem proportionibus, ſicuti AD ſecatur.

e ex pr. 2. huius

Secundò AG & DE concurrant in K, ducanturque à punctis B, C ad K rectæ lineæ BK, CK, ſecantes GE in F & H. Et quia GF parallela eſt baſi AB. Ergo d triangula AKB, & GKF ſimilia ſunt, ideoque vt BK ad FK ita eſt AB ad GF. Eadem ratione, vt eadem BK ad eandem FK, ita eſt BC ad FH; & ita etiam oſtendetur CD ad HE. Quare e permutando, vt AB ad BC, ita erit GF ad FH, & vt BC ad CD, ita erit FH ad HE. Quare patet propoſitum.

d ex pr. 6. huius

e prop. 12. lib. 5

EVCL. 23. VI.

PROPOSITIO XIII. *Si duo triangula, vel duo parallelogramma, habuerint vnum angulum vni angulo æqualem, habebunt rationem compoſitam ex rationibus laterum, quæ dictos angulos comprehendunt.* Tab. IV. Fig. 43.

Sint duo triangula, vel parallelogramma ABC & DEF quorum anguli B & E æquales ſint inter ſe. Dico figuram ABC ad figuram DEF (comparando ſemper eas, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt, ſcilicet triangula inter ſe, aut parallelogramma inter ſe) habere proportionem compoſitam ex ratione lateris BC

ad

ad EF, & ex ratione lateris AB ad latus DE. Fiat *a* EF ad K, vt AB ad DE, & in latere eleuato DE ſecetur *b* EH æqualis lateri eleuato AB alterius figuræ, & compleatur triangulum, vel parallelogrammum HEF. Quoniam ſi concipiantur a verticibus A & H cadere duas perpendiculares AI, HO ſuper baſes BC, EF, efficient duo triangula rectangula æquilatera interſe, cum anguli B, E ſint æquales, & latera AB, HE ſubtendentia angulos rectos æquales, ſint quoque æqualia, quare triangulorum, vel parallelogrammorum ABC & HEF altitudines AI, HO æquales erunt. Ergo *d* figura ABC ad eiuſdem ſpeciei figuram HEF eandem rationem habet, quam baſis BC ad baſim EF. Rurſus *e* figura FHE ad eiuſdem ſpeciei figuram FDE eſt vt HE ad DE, cum perpendicularis ab F ad HE ducta communis altitudo ſit figurarum; eſt verò HE, ſeu *f* ei æqualis AB ad DE, vt EF ad K. Ergo *g* figura HEF ad figuram DEF eſt, vt EF ad K. Quare *h* ex compoſitione ordinata, vt prima figura ABC ad tertiam eiuſdem ſpeciei DEF, ita eſt prima recta BC ad tertiam K. Sed BC ad K habet proportionem compoſitam ex ratione BC ad EF, & ex ratione ipſius EF ad K; eſtque EF ad K, vt AB ad DE.

*a prop. 11. hu.*
*b prop. 3 lib. 1.*
*c prop. 25. lib. 1.*
*d ex pr. 1. huius*
*e prop. 1 huius.*
*f prop. 3 lib. 3.*
*g prop. 7 lib. 3.*
*h prop. 19. lib. 3*

DE.

DE. Ergo *i* proportio figuræ ABC ad eiuſdem ſpeciei figuram DEF ex ijſdem proportionibus laterum BC ad EF, atque AB ad DE componitur. Quod erat oſtendendum.

*i Prop. 19. lib. 3*

*EVCL. 14. 15. VI.*

PROPOSITIO XIV. *Si duo triangula, vel duo parallelogramma, vnum angulum vni angulo æqualem, atque circa dictos angulos habuerint latera reciprocè proportionalia, erunt æqualia inter ſe. Et ſi fuerint æqualia, habebunt latera circa dictos angulos reciprocè proportionalia* Tab. V. Fig. 1.

Sint primò duo triangula vel duo parallelogramma ABC & DBF, quorum anguli ad B, æquales ſint inter ſe, poſitis in directum ABD & vt latus AB ad BD, ita ſit FB ad CB (ſic enim *a* figuræ ABC & DBF ſunt reciprocæ, cùm ABC contineatur à prima AB & quarta CB, atque DBF contineatur à ſecunda DB, & tertia BF quatuor rectarum proportionalium). Dico triangula ABC & DBF inter ſe, vel parallelogramma æqualia eſſe. Compleatur triangulum, & parallelogrammum CBD. Quia *b* triangulum CAB ad æquè altum triangulum CBD eſt vt baſis AB ad baſim BD. pariterque triangulum DFB ad triangulum DBC ſe habet vt baſis FB ad baſim BC; & poſita fuit

*a Def. 2 huius.*

*b 1. lib. 4.*

AB

AB ad BD, ſicut eſt FB ad BC. ergo *e* duo triangula CAB & DBF eandem proportionem habent ad idem triangulum CBD; & ideo triangula CBA & DBF æqualia ſunt interſe. Et eorum *e* dupla parallelogramma BE & BG æqualia quoq; interſe erunt. c 3. *lib.* 3. d 4. *lib.* 3. e 11. *l.* 3

Secundo ſint triangula ABC, FBD interſe vel parallelogramma æqualia circa angulos æquales Dico AB ad BD eſſe vt FB ad BC. Si hoc verum non eſt fiat HB ad BD vt FB ad BC. & compleantur figuræ BHC & BI. erit, ex prima parte huius, triangulum CHB æquale triangulo DBF, ſeu ei æquali CBA totum parti quod eſt impoſſibile. Ergo nulla alia preter AB ad BD ſe habet vt FB ad BC. Quare &c.

*Corollarium I.* Patet, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, eſſe parallelogrammum rectangulum, ſub extremis contentum, æquale ei, quod ſub medijs continetur. Et ſi duo parallelogramma rectangula æqualia fuerint, erit vnum contentum ab extremis, alterum verò à medijs quatuor rectarum proportionalium. Nam duo parallelogramma rectangula, quorum vnum continetur à prima, & quarta; alterum verò à ſecunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium, habent EVCL. 16. VI.

bent circa angulos rectos æquales latera reciprocè proportionalia. *f prop. 14. hu.* Ergo *f* ſunt æqualia inter ſe. Et ſi fuerint æqualia, habebunt *g* latera *g prop. 14. hu.* circa rectos angulos reciprocè proportionalia; ideoque vnum continetur à prima, & quarta, alterum verò à ſecunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium.

EVCL. 17. VI. *Corollarium* II. Et, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum, ſub extremis contentum, æquale erit quadrato, à media deſcripto. Et ſi quadratum æquale fuerit rectangulo, erit latus quadrati medium proportionale inter duo latera rectangulum continentia. Nam tres rectæ proportionales poſſunt effici quatuor proportionales, bis poſita media proportionali; ideoque (vt in præcedenti corollario dictum eſt) rectangulum, ſub extremis contentum, æquale erit ei, quod ſub duabus medijs æqualibus *h prop. 21. hu.* continetur, ideſt *h* quadrato mediæ proportionalis. Similiter exiſtente quadrato æquale rectangulo, continebitur quadratum à duabus medijs æqualibus, ideſt ab vna media trium proportionalium.

EVCL. 19. VI. PROPOSITIO XV. *Similia triangula, in duplicata ratione ſunt laterum homologorum.* Tabula V. Figura 2. Sint

Sint duo triangula ABC & DEF inter ſe ſimilia, quorum anguli B & E ſint æquales, & latera homologa AB & DE, vel BC & EF. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF, eſſe in duplicata proportione cuiuſlibet lateris BC ad eius homologum EF. Fiat *a* EF ad G, vt AB ad DE. Quoniam propter ſimilitudinem triangulorum ABC & DEF eſt *b* AB ad DE, vt BC ad EF; ſed vt AB ad DE, ita facta eſt EF ad G. Igitur, *c* vt BC ad EF, ita eſt EF ad G. Quare *d* BC ad G duplicatam proportionem habet eius, quam habet BC ad EF, ſeu AB ad DE. Eſt verò *e* proportio trianguli ABC ad ei æquiangulum DEF, vt BC ad G (vt pote compoſita ex rationibus laterum BC ad EF & EF ad G, ſeu AB ad DE). Igitur *f* triangulum A B C ad ei ſimile triangulum DEF duplicatam proportionem habet rationis cuiuſlibet lateris homologi BC ad homologum EF. Quod erat oſtendendum.

*a* prop. 11. huius
*b* prop. 4 huius.
*c* prop. 7 lib. 3.
*d* prop. 19. lib. 3
*e* prop. 23. huius
*f* prop. 7 lib. 3.

PROPOSITIO XVI. *Super data recta linea deſcribere Polygonum dato polygono æquiangulum, & habens circa angulos æquales latera proportionalia lateribus illius, ita vt data recta homologa ſint dato lateri Polygoni. Vocentur huiuſmodi polygona Similia inter ſe, & ſuper datas rectas ho-*

EVCL. 18. VI.

*homologas ſimiliter deſcripta*. Tab. V. Fig. 3.

Sit data quælibet figura polygonia CDG, debet ſuper data recta AB deſcribi figura, cuius anguli ſinguli æquales ſint ſingulis angulis figuræ datæ, & circa angulos æquales latera ſint proportionalia, ita vt AB homologa ſit dato lateri DC. Ab angulo C ad ſingulos oppoſitos angulos figuræ ducantur rectæ CE & CF, diuidentes figuram in triangula CDE, CEF & CFG; poſtea fiat *a* angulus BAH æqualis DCE & HAK æqualis fiat angulo ECF, atque angulus KAM fiat æqualis angulo FCG & ſic vlterius, ſi plures extiterint; eritque totus angulus BAM æqualis angulo DCG. Deinde, *b* vt DC ad CE ita fiat BA ad AH, & vt EC ad CF, ita fiat HA ad AK; atque vt FC ad CG, ita fiat KA ad AM, & ſic vlterius, ſi opus eſt. Patet *c* ex compoſitione ordinata, eſſe BA ad AM. vt DC ad CG. Coniungantur tandem rectæ BH, HK & KM. Dico figuram ABM eſſe quæſitam. Quoniam circa angulos æquales DCE & BAH latera DC ad CE & BA ad AH in eadẽ ſunt ratione: ergo *d* triangula DCE & BAH ſimilia ſunt; pariterque triangula ECF, & HAK ſimilia erunt, & ſic etiam triangula FCG, KAM erunt ſimilia. Quare *e* anguli CED, AHB

*a prop. 24. lib. 1*

*b prop. 11. huius*

*c prop. 19. lib. 5*

*d prop. 6. huius*

*e prop. 4 huius.*

HB æquales ſunt, & vt DE ad EC, ita eſt BH ad HA; pariterque anguli D, & B æquales ſunt, & vt C D ad DE, ita eſt AB ad BH. Rurſus *f* propter ſimilitudinem triangulorum ECF, & HAK anguli CEF, AHK æquales ſunt, & vt CE ad E F, ita eſt AH ad HK; erat autem prius, vt DE ad EC, ita BH ad HA. Ergo *g* ex compoſitione ordinata, vt DE ad EF, ita erit BH ad HK; & ſunt anguli DEC, BH A æquales, pariterque anguli CEF, AHK æquales ſunt oſtenſi. Ergo totus angulus DEF æqualis eſt toti angulo BHK. Eadem *h* ratione angulus G æqualis erit angulo M, & FG ad GC erit, vt KM ad MA, & erit angulus AKM æqualis angulo CFG, & AK ad KM erit, vt CF ad FG; at *i* propter ſimilitudinem triangulorum circa angulos æquales EFC, HKA, latera EF ad FC & HK ad KA ſunt proportionalia. Ergo *l* ex compoſitione ordinata H K ad KM erit vt EF ad FG; ſuntque toti anguli HKM & EFG æquales inter ſe (nempe ex æqualibus compoſiti) & ſic de cæteris, ſi plures extiterint. Quare omnes anguli figuræ ABM æquales ſunt omnibus angulis figuræ CDG ſinguli ſingulis; & circa angulos æquales latera ſunt proportionalia, quorum homologa ſunt datæ rectæ lineæ AB & C

*f prop. 4 huius.*

*g prop. 19 lib. 5*

*h prop. 4 huius*

*i prop. 4 huius.*

*l prop. 19 lib. 5*

D. Quapropter factum eſt, quod fuerat propoſitum. Vocentur autem huiuſmodi polygona ABM & CDG ſimilia inter ſe, & ſuper homologa latera AB & CD ſimiliter deſcripta.

EVCL. 21. *VI.* *Corollariū* Facilè deducitur, quò quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

Nam, ſi eidem rectilineo CDEF fiant *m* vel ſupponantur ſimilia duo rectilinea ABM & R, ideſt eidem æquiangula; & in eadem laterum ratione; erunt quoque duo rectilinea ABM & R æquiangula inter ſe, & *n* habentia circa angulos æquales latera proportionalia. Et propterea ſimilia erunt inter ſe.

m prop. 16. hu.
n prop. 7. lib. 3.

EVCL. 20. *VI.* PROPOSITIO XVII. *Similia Polygona in duplicata ratione ſunt laterum homologorum.* Tabula V. Fig. 4.

Sint polygona ſimilia R & S, quorum homologa latera ſint AB, FG, vel BC, GH, &c. Et quia, *a* vt AB ad BC, ita eſt FG ad GH. Ergo *b* permutando, vt AB ad FG, ita eſt BC ad GH. Eadem ratione CD ad eius homologum HK erit, vt BC ad GH; & ſic reliqua latera homologa proportionalia erunt. Vnde *c* eorum duplicatæ proportiones eædem erunt. Dico figuram R

a prop. 16. hu.
b prop. 12. lib. 3
c prop. 19. lib. 3

ad figuram S habere rationem duplicatam lateris AB ad eius homologum FG. Ab angulis æqualibus BAE & GFM ad angulos æquales oppoſitos coniungantur rectæ lineæ AC, AD, FH, FK, diuidentes figuras R & S in æquè multa triangulá, eo quod *d* figuræ ſimiles æquè multa latera habent. Et quoniam circa angulos æquales B & G latera AB ad BC & FG ad GH in eadem ſunt ratione. *e* Ergo triangula ABC & FGH ſimilia ſunt; ideoque anguli BCA, GHF æquales ſunt, & AC ad CB eſt, vt FH ad HG; Tandem *f* triangulum ABC ad ei ſimile triangulum FGH habet duplicatam proportionem eius, quam habet latus AB, ad eius homologum FG. Eadem ratione quia circa æquales angulos E, M latera ſunt proportionalia, erit triangulum AED ad ei ſimile FMK in duplicata proportione lateris DE ad eius homologum latus KM; ſeu duplicata lateris AB ad FG. Poſtea quia anguli BCD, GHK æquales ſunt, & ablati BCA & GHF æquales oſtenſi ſunt; Ergo reſidui anguli ACD & FHK æquales ſunt; & erat AC ad CB, vt FH ad HG & BC ad CD eſt, vt GH ad HK. (propter ſimilitudinem polygonorum). Ergo *g* ex compoſitione ordinata erit AC ad CD, vt FH ad

d *prop.* 16. *hu.*

e *prop.* 6 *huius.*

f *prop.* 15. *hu.*

[illegible]

g *prop.* 19. *lib.* 5.

HK; & comprehendunt angulos æquales ACD & FHK; Igitur *h* triangulum ACD ſimile eſt triangulo FHK, *i* & ad eum habet proportionem duplicatam eius, quam habet latus CD ad eius homologum HK, ſeu duplicatam lateris AB ad FG. Eadem ratione reliqua triangula, (ſi plura extiterint) erunt inter ſe in duplicata ratione lateris AB ad FG: ideoque *l* omnia triangula antecedentia, ſimul ſumpta, ad omnia conſequentia triangula ſimul, ideſt figura R ad S in eadẽ ratione erit, veluti eſt vnum triangulum ABC ad vnum FGH, ſeu habebit eandem duplicatam proportionem cuiuſlibet lateris BC ad eius homologum GH. Quod erat oſtendendum.

*h prop. 6 huius.*
*i prop. huius.*
*l prop. 15. lib. 3*

EVCL. 22. VI. PROPOSITIO XVIII. *Si latera homologa quatuor figurarum ſimilium proportionalia fuerint: rectilinea ipſa inter ſe proportionalia quoque erunt. Et ſi rectilinea ſimilia fuerint proportionalia: erunt eorum latera homologa proportionalia quoque.* Tabula V. Fig. 5.

Sint duæ figuræ R & S ſimiles inter ſe pariterque duæ figuræ X, Y ſimiles inter ſe: & ſit primò AB latus homologum figuræ R ad CD, latus homologum figuræ S, in eadem ratione, quam EF, latus homo-

mologum figuræ X, habet ad latus homologum G H figuræ Y. Dico figuram R ad S eandem rationem habere, quam X ad figuram Y. Quoniam a figura R ad ei ſimilem S duplicatam proportionem habet eius, quam habet latus AB ad eius homologum CD; pariterque proportio figuræ X ad ei ſimilem Y duplicata eſt eius, quam latus E F habet ad homologum GH. Sunt b verò proportiones duplicatæ æqualium, vel earundem proportionum AB ad C D; atque EF ad GH eædem quoque, vel æquales. Ergo c proportio figuræ R ad S eadem eſt, quæ figuræ X ad Y. Quod erat primum.

a pr. 17. huius.

b ex pr. 19. l. 3.

c pr. 7. l. 3.

Sit ſecundò figura R ad ei ſimilem S, vt X ad ei ſimilem figuram Y, ſintque AB, CD, EF, & GH latera homologa. Dico AB ad C D eſſe, vt EF ad GH. Quoniam proportiones figurarum R ad ei ſimilem S, & X ad ei ſimilem Y ſunt eædem, ſeu æquales, & ſunt d duplicatæ proportionum homologorum laterum. Ergo e earum ſubduplicatæ, ſcilicet rationes laterum AB ad CD, atque EF ad GH eædem quoque ſunt. Quare patet propoſitum.

d pr. 17 huius.

e ex pr. 19. l. 3.

PROPOSITIO XIX. *Parallelogramma circa æquales angulos, atque circa communem diametrum*

EVCL. 24. 26. VI. & 43. I.

*conſtituta, latera in directum haben-tia, erunt inter ſe ſimilia. Et ſi fue-rint ſimilia inter ſe, & habeant la-tera homologa in directum poſita, conſiſtent circa communem diame-trum. Atque duo parallelogramma complementi æqualia erunt inter ſe.* Tab. V. Fig. 6. 7.

Duo paralellogramma AC & EF conſtituta ſint circa communem dia-metrum DBG, circa angulos æqua-les ABC & EBF, atque habeant latera homologa AB, BE in dire-ctum poſita, pariterque latera CB, BF in directum. Dico primum pa-rallelogramma AC & EF ſimilia eſſe. Quoniam recta EG parallela ipſi DA baſi trianguli DBA, ſecat
a ex pr. 6. hu. duo eius latera: igitur *a* triangu-lum ABD ſimile eſt triangulo EB G: & propterea latera homologa AB ad BE atque DA ad EG, nec non DB ad BG in eadem ratione erunt. Simili modo quia FG pa-rallela eſt DC, baſi trianguli CDB, erunt triangula CDB, GBF ſimi-lia inter ſe, & vt prius latera ho-mologa CB ad BF, atque DC ad GF in eadem ratione erunt eiuſdem
b pr. 7. lib. 3. BD ad eandem BG, Ideoque *b* A B ad BE, AD ad EG, DC ad GF, atque CB ad BF in eadem ratione
c prop. 12. l. 3. erunt. Quare permutando *c* AB ad BC erit vt EB ad BF circa angulos æquales ABC, EBF; pariterque

d cir-

d circa angulos æquales alternos, d *prop.*
aut externum, & internum A & E, 15. *li.*
erit BA ad AD, vt BE ad EG, &
ſic reliqua omnia latera oppoſita.
Quapropter e parallelogramma AC e *prop.*
& EF ſimilia inter ſe erunt. 16. *hu.*

Secundò ſint parallelogramma
AC, EF ſimilia, & habeant latera
homologa AB, BE in directum
poſita, & ſic latera CB & BF in
directum; & ducantur diametri D
B & BG. Dico DBG vnam rectam
eſſe. Quoniam in duobus triangu-
lis DCB, BEG parallela ſunt la-
tera DC & BE, cùm AB, BE in
directum ſint poſitæ, & f AB paral- f *prop.*
lela ſit oppoſito lateri DC in pa- 26. *li1.*
rallelogrammo CA. Eadem ratio-
ne parallela ſunt latera CB & EG;
ſuntque g anguli DCB & BEG æ- g *prop.*
quales, propter ſimilitudinem fi- 17. *hu.*
gurarum. Ergo h baſes DB, BG h *prop.*
parallelæ ſunt inter ſe; & i ſe tan- 7. *hu.*
gunt in B. Ergo in directum ſunt i *ex pr.*
poſitæ. 17. *lib.* 1.

Tertiò Dico parallelogramma
complementi NB & BO æqualia
eſſe inter ſe. Quoniam l circa an- l *Cor pr*
gulos æquales ad verticem EBC & 5. *lib.* 1.
FBA latera ſunt reciprocè propor-
tionalia: Nam vt AB ad BE, ita
oſtenſa eſt CB ad BF. Ergo m pa- m *prop.*
rallelogramma NB & BO æqualia 14. *hu.*
ſunt. Quæ erant oſtendenda.

EVCL. 44.45I. **PROPOSITIO XX.** *Ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale rectilineo dato, in dato angulo.* Tab. V. Fig. 8.

Sit figura rectilinea RS, & quælibet recta data AB, angulus datus C. Debet ad rectam AB applicari parallelogrammum æquale rectilineo RS in angulo C. Diſtribuatur rectilineum in triangula R & S, & fiat *a* parallelogrammum DEF æquale triangulo R in angulo E æquali ipſi C, pariterque fiat parallelogrammum GL æquale triangulo S, cuius angulus H æqualis ſit eidem angulo C: poſtea *b* fiat angulus BAK æqualis angulo C, & *c* vt BA ad DE, ita fiat FE ad AM, & compleatur parallelogrammum AN: ſimiliter fiat, vt NM ad GH, ita LH ad MK, & compleatur parallelogrammum MO. Quoniam *d* duo parallelogramma AN, & DF circa angulos æquales A & E habent latera reciprocè proportionalia; igitur æqualia ſunt inter ſe; eſt verò triangulum R factum æquale parallelogrammo DF. Igitur parallelogrammum AN æquale eſt triangulo R. Rurſus *e* quia propter parallelas AB, MN eſt angulus externus KMN æqualis interno, & oppoſito angulo A, eſtque angulus H æqualis angulo C, ſiue A. Igitur duo anguli H & KMN æquales ſunt

*a prop. 33. lib. 1*
*b prop. 24. l. 1.*
*c pr. 11. huius.*
*d pr. 14 huius.*
*e prop. 15. lib. 1*

ſunt inter ſe; ſuntque circa hos angulos æquales latera reciprocè proportionalia. Igitur *f* parallelogrammum GL, ſeu ei æquale triangulum S erit æquale parallelogrammo M O. Et proptereà duo parallelogramma A N & M O, ideſt parallelogrammum K A B O æquale erit duobus triangulis R & S, ſiue rectilineo dato: eſtque applicatum ad rectam AB in angulo æquali ipſi dato C. Factum eſt ergo Problema. *f pr. 14. huius.*

PROPOSITIO XXI. *Datis duobus polygonis tertium deſcribere, quod ſimile ſit vni, & æquale reliquo datorum.* Tab. V. Fig. 9. EVCL. 25. VI. & 14. II.

Sint datæ duæ figuræ rectilineæ R & S. Debet conſtrui figura, quæ æqualis ſit figuræ S, at ſimilis ſit figuræ R. Super quolibet latere AB figuræ R fiat *a* parallelogrammum A D æquale ſpatio R in quolibet angulo BAC; & producta AB in E ſuper BD in angulo EBD, qui *b* æqualis erit interno & oppoſito B A C, fiat *c* parallelogrammum B F æquale ſpatio S. Patet parallelogramma AD & BF eſſe inter eaſdem parallelas AE CF. Poſteà inter duas rectas AB & BE *d* fiat media proportionalis GH, ſuper quam fiat *e* figura X ſimilis ipſi R, ita vt GH ſit latus homologum ipſi AB. Quoniam R & X ſunt fi- *a pr. 20. huius. b pr. 15. huius. c pr. 20 huius. d pr. 10. huius. e Prop. 16. huius.*

*f pr. 17. huius.* guræ ſimiles. *f* habebit R ad X duplicatam rationem eius, quam habet latus AB ad eius homologum GH; *g pr. 19. lib. 3.* ſed *g* AB ad BE duplicatam rationem habet eius, quam habet AB ad mediam proportionalem GH. Ergo, *h pr. 7. lib. 3.* *h* vt AB ad BE, ita eſt figura R ad figuram X; ſed *i prop. 1. huius.* *i* parallelogrammum AD ad parallelogrammum BF eſt, vt baſis AB ad baſim BE (cùm ſint inter eaſdem parallelas) Ergo *l prop. 7 lib. 3.* *l* figura R ad figuram X eſt, vt parallelogrammum AD ad parallelogrammum BF; eſt verò parallelogrammum AD æquale figuræ R, & parallelogrammum BF æquale ſpatio S. *m prop. 3. lib. 3.* *m* Ergo figura R ad figuram X eſt, vt figura R ad figuram S; ideoque figura *n* X æqualis eſt ſpatio S, & facta fuit figura X ſimilis ipſi R. Quod erat faciendum. *b prop. 4 lib. 3.*

EVCL. 35. 36. 37. III. PROPOSITIO XXII. *Si in circulo ductæ fuerint duæ rectæ lineæ, ſe ſecantes: parallelogrammum rectangulum, comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale erit ei, quod ſub ſegmentis alterius continetur, rectangulo. Et ſi rectangula ſub ſegmentis duarum rectarum ſe ſecantium, æqualia fuerint: eiuſdem circuli peripheria per quatuor terminos illarum tranſibit.* Tab. V. Fig. 10. 11. 12. 13.

In circulo ABC duæ rectæ lineæ du-

ductæ AEB & DEC ſe ſecent in E (ſiue ambæ ſecent circuli peripheriam in duobus punctis, vt in prima & ſecunda figura, ſiue vna AEB eam ſecet in duobus punctis A & B, altera verò recta DEC tangat eandem peripheriam in vno puncto à ſignis D & C expreſſo, vt in tertia figura, ſiue ambæ circulum tangant, vt in quarta figura.) Dico parallelogrammum rectangulum contentum ſub vnius ſegmentis AE & EB, æquale eſſe rectangulo, ſub alterius ſegmentis DE & EC contento. Coniungantur rectæ AC, DB. Quoniam duo anguli EDB & EAC, æquales ſunt, quia aut *a* ſunt in eodem ſegmento CADB, vt in prima, & ſecunda figura, aut *b* angulus EDB continetur à tangente ED, & ſecante BD, reliquus verò angulus EAC in alterno ſegmento BEC exiſtit, vt in tertia figura, aut *c* ambo anguli à tangentibus, & eadem ſecante contenti, æquales ſunt ei, qui in alterno ſegmento BFC effici poteſt, vt in quarta figura; ſuntque anguli *d* AEC & DEB æquales ad verticem, vel vnus, & idem: *e* Ergo duo triangula AEC & DEB ſimilia ſunt; & ideo, vt AE ad EC, ita eſt DE ad EB. Quapropter *f* parallelogrammum rectangulum, ſub prima & quarta proportionalium contentum, ideſt rectan-

*a prop. 14. l. 2.*
b *pr. 24. lib. 2.*
c *pr. 24. lib. 2.*
d *corol. prop. 5. lib. 1.*
e *ex pr. 4. huius*
f *ex pr. 14. hu.*

gulum AEB, æquale erit rectangulo DEC, quod à ſecunda & tertia continetur.

Secundò duæ rectæ AEB & DEC ſe ſecantes in E, efficiant rectangula AEB & DEC æqualia inter ſe; & per tria puncta A, C, B, ducatur g circuli peripheria. Dico eam transſire per punctum D. Si enim hoc verum non eſt, tranſeat per H citra, vel vltra punctum D. Ergo h rectangulum HEC æquale erit rectangulo AEB; ſed erat rectangulum DEC æquale eidem rectangulo AEB. Quare rectangula HEC & DEC æqualia ſunt inter ſe, pars, & totum; quod eſt impoſſibile. Non ergo circuli peripheria ACB tranſit per punctum H. Quapropter per puncta A, B, C, D tranſibit. Vt erat propoſitum.

g ex pr. 1. lib. 3.

h ex prima parte huius

PROPOSITIO XXIII. *Datis duabus rectis lineis, in altera earum punctum intra, aut extra reperire, quod efficiat duo ſegmenta, inter quæ reliqua ſit media proportionalis. Oportet autem medietatem rectæ lineæ, intra quam punctum ſignari debet, non minorem eſſe reliqua.* Tab. V. Fig. 14.

Sint duæ rectæ lineæ AB & C debet reperiri punctum intra rectā lineam AB, vt in primo caſu, vel extra eam in directum vt in ſecun-

do

do, ita vt recta linea C ſit media proportionalis inter facta ſegmenta; ſed in primo caſu oportet, vt ſemiſſis ipſius AB non minor ſit, quam C. Super diametro A B fiat circulus AEB, cuius centrum G; & *a* à termino B ducatur BD perpendicularis ad AB, ſeceturque *b* BD æqualis ipſi C. Poſtea à termino D (in primo caſu) ducatur *c* recta linea DE parallela ipſi AB, quæ non cadet extra circulum, eo quod ſemiſſis ipſius AB, id eſt radius ſeu altitudo ſemicirculi AEB ſupponitur æqualis, aut maior quam C, ſeu quam perpendicularis BD; & propterea DE tanget, aut ſecabit circulum in E: at in ſecundo caſu coniungatur recta DG ad centrum circuli, ſecans peripheriam eius in E. Deinde *d* ſecetur recta BH æqualis ipſi DE, coniunganturque rectæ EH, DH. Quoniam in duobus triangulis EDH & BH D facta ſunt duo latera BH & DE æqualia, atque latus HD eſt commune, & anguli comprehenſi ED H & BHD æquales ſunt inter ſe (eo quod in primo caſu *e* ſunt alterni in parallelis DE & BA; in ſecundo verò caſu *f* ſunt ad baſim trianguli iſoſcelij DGH; propterea quod radijs æqualibus GB, GE adduntur æquales BH, ED.) Igitur *g* baſis EH æqualis eſt BD, ſeu C;

pa-

*b prop. 10. lib. 1*
*b prop. 3. lib. 1*
*c Corol. prop. 16. lib. 3*
*d pr. 3. lib. 1.*
*e prop. 15. lib. 1*
*f Prop. 6. lib. 1.*
*g prop. 4. lib.*

pariterque angulus DEH æqualis eſt
*h prop. 32. lib. 1* angulo DBH recto; ideoque *h* HE
perpendicularis eſt ad DE; & propterea in primo caſu *i* EH ſecat per-
*i prop. 15. lib. 1* pendiculariter quoque diametrum
*l ex pr. 21. lib. 3* BA æquidiſtantem ipſi DE; at in ſecundo caſu *l* HE contingit circu-
*m prop. 22. hu.* lum in puncto E. Igitur *m* paralle-
logrammum rectangulum AHB æquale eſt quadrato rectæ lineæ HE;
*n ex pr. 14. hu.* & ideo *n* HE, ſeu ei æqualis C media proportionalis erit inter ſegmenta AH & HB. Vt propoſitum fuerat.

EVCL. 28. 29. VI. PROPOSITIO XXIV. *Ad datam rectam lineam dato rectilineo ſpatio, æquale parallelogrammum applicare deficiens, aut excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit alteri dato: oportet autem quando parallelogrammum deficiens applicandum eſt, datum ſpatium maius non eſſe parallelogrammo, ſuper dimidia deſcripto, quod ſimile ſit parallelogrammo dato.* Tabula V. Figura 15.

Sit datum quodlibet ſpatium rectilineum C & parallelogrammum D, atque recta linea AB; & ſuper
*a prop. 16. hu.* eius medietate EB fiat *a* parallelogrammum EF ſimile ipſi D. Debet ad rectam AB applicari parallelogrammum æquale ſpatio C, & deficiens (in primo caſu), aut excedens (in ſecundo caſu) parallelo-

gram

grammo, quod ſimile ſit ipſi D: ſed neceſſe eſt, in primo caſu, vt ſpatium C non ſit maius parallelogrammo EF. Fiat *b* parallelogrammum R ſimile ipſi EF, & æquale ſpatio C, ſitque IS eius latus homologum ipſi EB: Et quia in primo caſu, ponitur ſpatium C, ſeu ei æquale parallelogrammum R non maius parallelogrammo EF. *c* Ergo latus IS æquale, aut minus erit latere ei homologo EB, ſcilicet medietate ipſius AB. Quare recta AB *d* ſecari poteſt in H, ſicuti in ſecundo caſu *e* produci poteſt, vt IS media proportionalis ſit inter AH & HB. Fiat *f* ſuper HB parallelogrammum HO ſimile & ſimiliter poſitum ſpatio R ſiue EF; & compleatur parallelogrammum NA. Et quia ſpatium HO ad ſpatium R ei ſimile habet duplicatam rationem lateris HB ad IS ſcilicet ſpatium HO ad R *g* ſeu ad C ſe habet vt BH ad HA, ſeu *h* vt parallelogrammum HO ad parallelogrammum NA. Ergo *i* ſpatium C æquale eſt parallelogrammo NA; quod applicatum eſt ad AB atque deficit in primo caſu, & excedit in ſecundo in figura HO, quæ ſimilis eſt ipſi EF, ſeu *l* parallelogrammo dato D. Quod erat faciendum.

*b prop. 21. hu.*
*c ex pr. 17. hu.*
*d ex pr. 23. hu.*
*e ex pr. 23. hu.*
*f prop. 16. hu.*
*g prop. 17. hu.*
*h prop. 1. huius.*
*i prop. 4 lib. 3.*
*l cor. pr. 16. hu.*

PROPOSITIO XXV. *Propoſitam rectam lineam terminatam ſecare in*

EVCL. 11. II. & 30. VI.

*in duo ſegmenta, quorum vnum medium proportionale ſit inter totam, & reliquum ſegmentum. Vocetur autem recta, ſic ſecta, ſecundum extremam, & mediam rationem diuiſa.* Tabula V. Fig. 16.

Data recta AB ſecari debet, vt proponitur. a producatur recta AB in C, vt ipſa AB ſit media proportionalis inter productam AC, eiuſque productionem BC; ſeceturque b BD æqualis BC: erit CA ad AB vt AB ad BC, ſeu c ad ei æqualem BD: & diuidendo d CB, ſeu e ei æqualis DB ad BA erit, vt AD ad DB; & propterea ſegmentum BD erit medium proportionale inter totam AB reliquumque eius ſegmentum AD. Quod erat faciendum. Vocetur recta AB hac ratione ſecta in D, diuiſa ſecundum mediam & extremam rationem.

a prop. 23. hu. b prop. 3. lib. 1. c Prop. 3. lib. 3. d prop. 13. lib. 3. e prop. 3. lib. 3.

PROPOSITIO XXVI. *Si duarum rectarum linearum, in eadem ratione diuiſarum, vna ſit ſecta extrema & media ratione; altera quoque ſimiliter ſecta erit: Et ſi duæ rectæ, ſingulæ ſectæ fuerint extrema & media ratione ambæ in eiſdem rationibus ſectæ erunt.* Tabla V. Fig. 17.

Pappi 54. R.

Sit AB ſecta in E extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum AE; & vt BA ad AE, ita ſit DC ad CF. Dico CD in F ſectam

quo-

quoque eſſe extrema, & media ratione. Quoniam BA ad AE eſt, vt DC ad CF: Ergo diuidendo *a* BE ad EA, eſt vt DF ad FC; & inuertendo *b* erit AE ad EB, vt CF ad FD. Et quia AB ſecta eſt in E extrema, & media ratione: Ergo *c* AE ad EB eſt, vt BA ad AE; ſed vt BA ad AE, ita erat DC ad CF. *d* Ergo DC ad CF, eſt, vt AE ad EB; fuit autem, vt AE ad EB, ita CF ad FD: Ergo, *e* vt DC ad CF, ita eſt CF, ad FD. ideoque CD in F ſecatur extrema, & media ratione.

*a prop. 13. lib. 3* *b prop. 9 lib. 3.* *c prop. 25. huius* *d prop. 7. lib. 3* *e prop. 7. lib. 3.*

Secundò ſint ſectæ duæ rectæ AB & CD ambæ extrema, & media ratione in E & F. Dico eas ſecari proportionaliter. Si hoc verum non eſt, ſit CG (maior, vel minor, quam DC) ad CF, vt BA ad AE. Ergo, vt dictum *f* eſt, ſicuti AB in E, ita erit GC in F ſecta extrema, & media ratione; ideoque *g* rectangulum FGC æquale erit quadrato mediæ proportionalis CF; ſed ex hypotheſi CF erat media proportionalis inter FD, & CD. Ergo *h* parallelogrammum rectangulum FDC æquale eſt quadrato eiuſdem CF. Quare parallerogramma rectangula FGC & FDC æqualia inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo aliqua GC maior, vel minor, quàm

*f primò par. huius* *g ex pr. 24. huius* *h ex pr. 24. huius*

DC

DC habere poteſt ad CF eandem rationem, quam BA ad AE, ideoque ipſamet DC ad CF erit, vt BA ad AE. Et diuidendo *i* BE ad EA erit, vt DF ad FC, & *l* inuertendo AE ad EB erit, vt CF ad FD. Quare patet propoſitum.

*i prop. 15. lib. 3*
*l prop. 9 lib. 3.*

EVCL. 5. XIII.

*Corollarium* Ex his duabus propoſitionibus deducitur, quòd, ſi alicui rectæ lineæ ſecundum extremam, & mediam rationem diuiſæ, addatur recta æqualis maiori ſegmento: compoſita linea ſecundum extremam, & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea. nam in propoſitione 25. ſecta fuit AB in D extrema, & media ratione, & addita BC æquali maiori ſegmento BD, erat BD, ſeu ei æqualis CB ad BA vt AD ad DB; vnde tam AB in D, quàm CA in B in eadem ratione ſecantur; & propterea ex hac 26. propoſitione recta CA in B extrema, & media ratione ſecabitur, ſicuti AB in D extrema, & media ratione ſecta erat.

*Finis Libri quarti.*

LI-

# LIBER V.

EVCL. lib. IV. II. & reſid. VI

## DEFINITIONES.

I. *FIGVRA rectilinea inſcribi in circulo dicitur, cùm ſinguli eius anguli tangunt circuli peripheriam. Et circumſcribi dicitur circulo, cùm ſingula figuræ latera tangant circuli peripheriam.*

II. *E contra circulus inſcribi dicitur in figura rectilinea, cùm circuli peripheria tangit ſingula latera figuræ: Et circumſcribi dicitur, cùm circuli peripheria tangit omnes angulos figuræ.* Tabula V. Fig. 18.

## AXIOMA.

*Si à terminis rectæ lineæ, ſubtendentis arcum alicuius circuli, ducantur duæ rectæ lineæ, concurrentes extra circulum, & tota extra ipſum poſitæ: vel ſimili modo ducatur vna curua linea: erunt lineæ comprehendentes maiores peripheria comprehenſa; ſubtenſa verò recta linea minor erit eadem peripheria, ſeu curua.* Tabula V. Fig. 19. (*Archi. de Sphæra & cyl. lib. I*)

Sit enim circuli peripheria AEC, ſubtenſa verò recta AC, & curua ABC, atq; duæ rectæ tangentes circulum AD, CD, concurrentes in D & extra curuam cadentes. Mani-

feſtum

feſtum eſt rectam AC, minorem eſſe peripheria AEC, nec non curua ABC, cum recta ſit omnium breuiſſima: & AEC minorem eſſe quàm ABC & ABC minorem eſſe quam ADC. eo quod AEC minùs recedit à rectitudine, quàm ABC, & hæc minùs, quàm ADC.

PROPOSITIO I. *Ad datam rectam lineam, atque ad eius punctum, angulum deſcribere, qui quinta pars ſit quatuor rectorum.* T. V. F. 20

Ad datam rectam AB, atque ad eius punctum B angulus effici debet, qui ſit quinta pars quatuor rectorum. Secetur *a* recta linea AB extrema, & media ratione in C, cuius maius ſegmentum ſit AC; & centro A, interuallo AB circulus BD deſcribatur, in quò applicetur, *b* recta BD æqualis maiori ſegmento AC. Dico angulum ABD eſſe quæſitum. Iungantur rectæ AD & CD. Quoniam *c* tres rectæ BA, AC & CB proportionales ſunt, & eſt BD æqualis AC, atque radius AD æqualis AB. Ergo in triangulis ABD & DBC circa *d* æquales angulos ADB & B ſubtenſos à radijs æqualibus, eſt AB, ſeu ei æqualis AD ad DB, vt DB ad BC. Quare *e* angulus CDB æqualis eſt angulo A; & eſt AC ad CB, vt BA ad AC, ſeu vt AD ad DB: Ergo *f* angulus

a prop. 25. lib. 4

b prop. 32. lib. 4

c prop. 25. lib. 4

d prop. 6. lib. 1.

e prop. 6. lib. 4.

f prop. 3 lib. 4.

gulus ADB, ſeu ei æqualis B, duplus eſt anguli CDB, ſeu anguli A. Ergo qualium partium angulus A eſt vna, erit B duæ partes, & D pariter duæ. Quare anguli A, B & D, ſimul ſumpti, (qui *g* æquales ſunt duobus angulis rectis) æquales erunt quinque angulis, quorum quilibet æqualis eſt ipſi A; ideoque angulus A quinta pars erit duorum rectorum. Sed quam proportionem duplam habet angulus B ad angulum A, eandem habent quatuor recti ad duos rectos: Et permutando *h* angulus B ad quatuor rectos erit, vt angulus A ad duos rectos; ſed angulus A quinta pars eſt duorum rectorum. Ergo *i* angulus B quinta pars eſt quatuor rectorum, Vt erat propoſitum.

*g prop. 18. lib. 1*

*h prop. 12. lib. 3*

*i Def. 8 lib. 3.*

*Corollarium* Hinc patet, qua ratione triangulum Iſoſcelium conſtitui debeat, in quo quilibet angulorum ad baſim duplus ſit anguli verticalis.

EVCL. 10. IV.

PROPOSITIO II. *Angulum reperire, qui ſit quintadecima pars quatuor rectorum.* Tabula V. Fig. 21.

Effici debet angulus, qui ſit vna pars, earum, qualium quatuor recti in quindecim partes æquales diuiduntur. Fiat *a* angulus ABC duplus vnius anguli trianguli æquilateri. Et quia, vt duo recti ad quatuor

*a prop. 24. lib. 1*

tuor

tuor rectos, ita eſt angulus vnus trianguli æquilateri ad angulum ABC vtræque enim rationes ſunt, ſubduplæ; & permutando, *b* vt duo
*b prop. 12. lib. 3*
recti ad vnum angulum trianguli æquilateri, ita ſunt quatuor recti ad angulum ABC: eſt *c* vero vnus angulus trianguli æquilateri tertia pars duorum rectorum: Ergo angulus ABC tertia pars eſt quatuor rectorum. Fiat rurſus angulus CBD tertia pars quatuor rectorum, ideſt *d* æqualis ipſi ABC. Et quia *e* anguli omnes ABC, CBD & DBA circa punctum B æquales ſunt quatuor rectis, ſuntque duo anguli ABC, CBD duæ tertiæ partes quatuor rectorum, ergo reliquus angulus ABD tertia pars quoque erit quatuor rectorum. Poſtea fiant *f* anguli ABE, EBF, FBG, GBH qui ſinguli æquales ſint quintæ parti quatuor rectorum: erit, vt antea; quintus angulus HBA æqualis prioribus, & quinta pars quatuor rectorum. Et quoniam angulus ABF æqualis eſt angulo ABG, cum vterque æqualis ſit duabus quintis quatuor rectorum: Suntque duo anguli ABG & ABD æquales quoque: Ergo reſidui anguli CBF & DBG æquales erunt. Deinde quia ab æqualibus angulis ABC & CBD auferuntur æquales anguli ABE & FBG: Ergo reſiduus angulus EBC æqualis eſt duobus reſiduis

*c ex pr. 18. lib. 1*

*d prop. 24. lib. 1*

*e ex pr. 13. lib. 1*

*f prop. 1 huius.*

ſiduis

ſidui angulis CBF & G B D; ſunt verò oſtenſi anguli CBF & GBD æquales inter ſe. Ergo angulus EB C duplus eſt anguli CBF; & totus angulus EBF triplus eſt anguli CB F. Eadem ratione tam angulus A BE, quàm ABH, quàm HBG, & quàm FBG æqualis eſt triplo anguli CBF. Quare omnes anguli FBE, EBA, ABH, HBG, GBF, ſimul ſumpti, quinquies ſummam trium angulorum æqualium vni CBF, ideſt decies & quinquies angulum CBF continebunt. Et propterea angulus CBF, decies & quinquies ſumptus, æquatur angulis omnibus circa punctum B, ideſt *g* quatuor rectis. Quod erat faciendum. *g ex pr. 13. lib. 1*

PROPOSITIO III. *Intra datum circulum triangulum dato triangulo æquiangulum, & polygonum æquilaterum, & æquiangulum trium, quatuor, quinque, & quindecim laterum, & quodlibet aliud, quod ex continua duplicatione laterum eorundem polygonorum conſurgit, inſcribere. Vocentur autem huiuſmodi figuræ æquilateræ, & æquiangulæ: figuræ* Regulares. Tab. V. Fig. 22. 23. 24. 25 26. EVCL. 2. 6. 11. 15. 16. *IV.*

In circulo BCD, cuius radius A B inſcribendæ ſunt figuræ imperatæ. Et primò triangulum, quod ſit æquiangulum dato triangulo ZXY.

Abſcin-

*a prop. 26. l. 2.* Abſcindatur *a* circuli ſegmentum BCD, capiens angulum æqualem ipſi angulo Y, & iungatur recta BC, & in oppoſita parte abſcindatur *b* ſegmentum BCD, capiens angulum æqualem angulo X, & coniungantur rectæ BD & CD. Patet angulum D æqualem eſſe angulo Y, & angulum C æqualem eſſe ipſi X; ideoque *c* triangulum inſcriptum circulo BCD æquiangulum erit triangulo dato ZXY.

*c prop. 26. lib. 2*

*c ex pr. 4. lib. 4.*

Secundò pro triangulo æquilatero, & æquiangulo diuidentur, (vt in præcedenti factum eſt) omnes anguli ad centrum, id eſt quatuor recti, in tres angulos BAC, CAD, & DAB qui ſinguli ſint æquales tertiæ parti quatuor rectorum. Pro quadrato verò fiant *d* quatuor anguli ad centrum BAC, CAD, DAE, & EAB, ſinguli æquales quartæ parti quatuor rectorum, ſeu recti; atque pro pentagono fiant quinque anguli BAC, CAD, DAE EAF, & FAB, ſinguli æquales quintæ parti quatuor rectorum; tandem pro quintidecagono ad centrum fiant quindecim *f* anguli BAC, CAD, DAE, EAF, &c. ſinguli æquales decimæquintæ parti quatuor rectorum. Manifeſtum eſt in qualibet ex his diuiſionibus angulos circa centrum diſtribui in partes æquales. At in omnibus producantur radij

*d prop. 10. l. 1.*

*e prop. 1. huius*

*f prop. 2 huius.*

dij AB, AC, AD, &c. vſque ad circuli peripheriam in punctis B, C, D, &c. & coniungantur rectæ BC, CD, DE, &c. quouſque compleantur figuræ. Oſtendendum eſt omnia prædicta polygona eſſe æquilatera, & æquiangula. Quoniam omnes anguli BAC, CAD, &c. verticales ad centrum A æquales facti ſunt, & radij omnes ſunt pariter æquales. Ergo g omnia triangula iſoſcelia BAC, CAD, DAE, &c. ſunt ſimiliter æqualia, æquè alta, & æquiangula inter ſe, & eorum baſes BC, CD, DE, &c. æquales erunt. Quare figura BCDEF &c. æquilatera erit. Et quia anguli omnes ad baſes iſoſcelium, vt ſunt BCA, ACD, CDA, ADE, &c. æquales oſtenſi ſunt: Ergo bini binis æquales erunt; ideoque angulus BCD æqualis erit angulo CDE, & ſic reliqui omnes. Quare quælibet figura BCDE &c. circulo inſcripta, æquiangula eſt, & æquilatera. g prop. 4 lib. 1.

Poſtea patet, quod ſi in qualibet ex dictis figuris diuidantur omnes h anguli ad centrum bifariam, & rurſus bifariam, & ſic vlterius, atque in peripheria circuli rectæ, ſubtendentes æquales angulos ad centrum, ducantur quouſque figuræ compleantur, deſcriptæ erunt aliæ figuræ æquilateræ, & æquiangulæ; & ſic in triangulo æquilatero ex bipartita h prop. 8 lib. 1.

 diui-

diuiſione trium angulorum BAC, CAD, DAB conſurget figura hexagona, ſecundò figura duodecim laterum, tertiò figura viginti quatuor laterum, & ſic vlterius. In quadrato verò ex bipartita diuiſione angulorum ad centrum conſurgit figura octo laterum, poſtea ſexdecim, poſtea duorum & triginta, &c. At in pentagono conſurgit primò figura decem laterum, poſtea viginti, poſtea quadraginta laterum &c. Tandem in quintidecagono cõſurgit figura triginta laterum, poſtea ſexaginta, &c. quæ omnes, vt prius oſtendentur æquilateræ, & æquiangulæ, vt eſt imperatum. Vocentur autem huiuſmodi figuræ æquilateræ, & æquiangulæ, *Regulares figuræ*, quæ notam deſcriptionem habent.

EVCL. 7.12.IV. PROPOSITIO IV: *Circulo dato triangulum dato triangulo æquiangulum, & quodlibet polygonum regulare notæ deſcriptionis circunſcribere.* Tabula V. Fig. 27.28.

Sit datus circulus ABC, cuius centrum F. debet circa ipſum deſcribi triangulum æquiangulum dato triangulo ZXY, & quodlibet polygonum regulare notæ deſcriptionis.

a prop. 3 huius. Inſcribatur a triangulum ABC æquiangulum ipſi triangulo ZXY, aut polygonum tot laterum, quot

petun-

petuntur; & à centro F ducantur *b* perpendiculares FO, FR, FS, &c. ſuper latera AB, BC, &c. quæ ſecent peripheriam in punctis O, R, S, &c. & per hæc puncta ducantur *c* circulum tangentes HG, GK, &c. quouſque compleantur figuræ circunſcriptæ; cumque eiſdem tangentibus *d* perpendiculares ſint ijdem radij, *e* ergo AB & GH parallelæ erunt, pariterque BC, HK, & ſic reliquæ æquidiſtabunt: ideoque *f* efficient angulum GHK æqualem angulo ABC. Et ſimiliter angulus G oſtendetur æqualis angulo A, & angulus K æqualis oſtendetur angulo C & ſic reliqui. Quare triangulum, circunſcriptum circulo GHK, æquiangulum eſt triangulo dato ZXY, & figura circunſcripta GHKN æquiangula eſt; cùm eius anguli æquales ſint angulis figuræ regularis inſcriptæ ABCE.

b prop. 11. lib. 1

c ex pr. 21. lib. 3

d prop. 23. lib. 3

e prop. 16. lib. 1

f ex pr. 7. lib. 4

Poſtea in polygonis, ductis rectis FG & FA, quia in triangulis GOF & VGF duo *g* latera GO & GV æqualia ſunt, cùm ſint latera æqualium quadratorum ex tangentibus, ab eodem puncto ductis, & radij FO, FV, inter ſe æquales, atque latus FG commune: Ergo *h* anguli OGF & VGF ſunt inter ſe æquales; Sed *i* recta FA diuidit quoque bifariam figuræ inſcriptæ angulum BAE, & eſt angulus BAE æqualis oſtenſus

g ex pr. 22. lib. 4

h prop. 7. lib. 1.

i prop. 3 huius.

angulo HGN: Ergo eorum ſemiſ-ſes, ſcilicet anguli HGF & BAF æquales ſunt; eſtque HG parallela ipſi BA; Ergo *l* GF parallela eſt ipſi AF, & conueniunt in F: *m* Ergo vna, & eadem recta linea eſt FAG, ex centro per angulos vtriuſque figuræ tranſiens. Eadem ratione rectæ lineæ erunt FBH, FCK, FDM & FEN, quæ à centro per angulos vtriuſque figuræ extenduntur. Deinde quia BA parallela eſt HG, baſi trianguli HFG: Ergo *n* AB ad GH eſt, vt BF ad FH. Eadem ratione BC ad HK eſt, vt eadem BF ad eandem FH; ideoque, *o* vt BA ad HG, ita eſt BC ad HK: & ſunt antecedentes BA & BC æquales in polygono inſcripto regulari. Ergo *p* & conſequentes HG & HK æquales ſunt inter ſe. Eadem ratione reliqua latera KM, MN, NG æqualia erunt inter ſe, & ipſis GH, HK. Quare figura GHKN æquilatera eſt; ſed prius erat æquiangula. Ergo *q* figura circunſcripta GHKN regularis eſt. Quod erat faciendum.

*l ex pr. 7. lib. 4*
*m ex prop. 17. lib. 1.*
*n ex pr. 6. lib. 4.*
*o pr. 7. lib. 3.*
*p ex pr. 16. lib. 3*
*q prop. 3. huius*

*Corollarium* Patet, quod, ſi omnes anguli ad centrum circuli, vel eius peripheria diſtributa fuerit in quotlibet partes æquales ternario plures, & rectæ puncta diuiſionum coniungentes, intra circulum du-

can-

cantur, nec non rectæ circulum tangentes, parallelæ rectis coniunctis producantur: deſcripta erunt duo polygona regularia parium laterum ſimilia inter ſe, alterum circunſcriptum, alterum verò circulo inſcriptum. Eritque circunſcriptum ad inſcriptum, vt quadratum radij vnius ad quadratum radij alterius; & vt quadratum rectæ lineæ ex centro, vſque ad angulum circunſcriptæ figuræ ad quadratum radij circuli. Ductæ enim fuerunt in hac propoſitione tangentes GH, HK, &c. parallelæ lateribus AB, BC &c. & oſtenſa fuit figura GHM æquiangula figuræ ABCD, & latera circa angulos æquales in eadem proportione æqualitatis; & rurſus latus HG ad AB fuit, vt GF ad circuli radium FA, vel vt radius OF ad radium FP. Et propterea *r* ſuper his lateribus proportionalibus erunt figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ GHKM ad ABCD, in eadem ratione, quam habet quadratum ex FG ad quadratum radij FA, vel vt quadratum ex OF ad quadratum ex FP. Vocentur autem huiuſmodi figuræ (breuitatis gratia) *Circulo adſcripta*.

*r prop. 18. lib. 4*

PROPOSITIO V. *Circa quodlibet polygonum regulare circulum deſcribere.* Tabula V. Fig. 29.

EVCL. 9. 14. IV.

Sit quodlibet polygonum regulare ABD. Debet circa ipſum deſcribi circulus. Ducta recta AC, circa triangulum ABC deſcribatur *a* circulus, cuius centrum O; & coniungatur recta linea BD. Et quia in duobus triangulis ABC, & DCB duo latera AB, & DC æqualia ſunt, cùm ſint latera regularis figuræ, & latus BC eſt commune, atque anguli ABC & DCB æquales ſunt inter ſe: Ergo *b* anguli BAC & CDB æquales ſunt inter ſe, & inſiſtunt ſuper eadem recta BC, ad eaſdem partes conſtituti: Ergo *c* circunferentia circuli, cuius centrum O, per tria puncta A, B & C ducta, tranſibit quoque per quartum punctum D. Eadem ratione peripheria circuli, cuius centrum O, quæ tranſit per tria puncta B, C & D, tranſibit quoque per punctum E, & ſic per reliqua. Quare *d* circulus, radio OA deſcriptus, circunſcriptus erit polygono ABCDE. Quod erat faciendum.

*a ex conſtruct. prop. 1. lib. 2.*
*b prop. 4. lib. 1.*
*c prop. 14. lib. 2.*
*d Def. 2. huius*

EVCL. 4 & 13. IV. PROPOSITIO VI. *Intra triangulum, & intra quodlibet polygonum regulare circulum inſcribere.* Tabula V. Fig. 30. 31.

Sit quodlibet triangulum, aut polygonum regulare ABC. Debet inſcribi circulus in his figuris. Et primò in triangulo ſecentur *a* angu-

*a prop. 9. lib. 1*

li

li A & B biſariam à rectis AD & BD, quæ concurrent intra triangulum, vt in D, b à quo cadant perpendiculares DE, DF & DG ſuper trianguli latera. Quoniam in triangulis DBF & DBE duo anguli ad B æquales facti ſunt, & duo anguli ad E & F ſunt recti æquales quoque, atque latus DB eſt commune, & oppoſitum rectis angulis: Ergo c DF æqualis eſt ipſi DE. Eadem ratione in triangulis DEA & DGA, erunt latera DG & DE æqualia inter ſe. Quare æquales erunt tres perpendiculares DF, DE & DG inter ſe, quæ ſunt diſtantiæ puncti D à lateribus trianguli.

b prop. 11. lib. 1

c prop. 25. lib. 1

Secundò in polygono regulari circunſcribatur d circulus, cuius centrum D. Et quia in circulo ABN rectæ lineæ applicatæ AB, BC, CN, &c. ſunt inter ſe æquales: ergo e æqualiter diſtant à centro D; ideoque ductæ perpendiculares DG, DE, DF, &c. æquales erunt inter ſe, vt æquales erant in triangulo. Et centro D radio DE, deſcipto circulo EFG, tranſibit neceſſariò per puncta F, G, &c. & continget f latera figura & in punctis E, F, G, &c. eo quod radij DE, DF, DG, &c. perpendiculares ſunt ad latera AB, BC, &c. Quare g circulus EFG inſcriptus eſt figuræ ABC. Quod erat faciendum.

d prop. 5. huius

e prop. 10. lib. 2

f prop. 23. lib. 2

g Def. 2 huius.

EVCL. l. XIII **PROPOSITIO VII.** *In pentagono regulari duæ rectæ lineæ ſubtendentes angulos figuræ ſe mutuò ſecant extrema, & media ratione; & maiora illarum ſegmenta æqualia erunt pentagoni lateri.* Tab. V. Fig. 32.

Sit pentagonum regulare ABD, & duæ rectæ lineæ AC, BE ſubtendant angulos figuræ ABC & BAE; & ſe ſecent in H. Dico tam CA, quàm EB ſecari in H extrema, & media ratione, & earum maiora ſegmenta CH & EH æqualia eſſe cuilibet lateri pentagoni BA. Deſcribatur *a* circulus ABD circa pentagonum. Quoniam *b* in quadrilatero BEDC circulo inſcripto duo oppoſiti anguli CBE & D, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis: eſtque *c* angulus BCD æqualis angulo D in regulari pentagono. Ergo duo anguli EBC & BCD, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis; ideoque *d* duæ rectæ BE & CD ſunt inter ſe parallelæ. Eadem ratione CA & DE parallelæ ſunt. Quare *e* CHED parallelogrammum erit, in quo latera oppoſita CH & DE æqualia erunt, & ſic HE ipſi CD, vel cuilibet BA æquale erit. Poſtea quia anguli BAC & AEB inſiſtunt peripherijs æqualibus BC & AB: ergo *f* anguli BAC & AEB æquales ſunt; eſtque angulus ABE communis: Ergo *g* triangula

*a prop. 5. huius*
*b prop. 15 lib. 2*
*c prop 3 huius.*
*d prop. 16. lib. 1*
*e prop. 26. lib. 1.*
*f prop. 17. lib. 2*
*g prop. ... b. 4.*

EBA

EBA & ABH ſimilia ſunt; ideoque EB ad BA erit, vt AB ad BH: fuit autem oſtenſa HE æqualis ipſi BA. Ergo *b* tota BE ad HE eſt, vt HE ad HB; ideoque *i* BE ſecta eſt in H extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum HE æquale eſt ipſi BA lateri pentagoni. idem concludetur de ſubtenſa CA. Quare patet propoſitum.

*h prop. 3. & 7. lib. 3.*
*i prop. 25. lib. 4*

PROPOSITIO VIII. *Si figurarum regularium eodem circulo inſcriptarum lateri hexagoni ad datur, vel tollatur, latus decagoni: efficietur recta linea extrema, & media ratione ſecta, maiuſque compoſitæ ſegmentum erit hexagoni latus, & maius ſegmentum diminutæ erit latus decagoni.* Tab. V. Fig. 33.

EVCL. 9. XIII

In circulo ABF ſit recta linea AB latus decagoni regularis, & ei in directum addatur BE *a* æqualis BF lateri hexagoni regularis eidem circulo inſcripti. Dico rectam AE ſecari in B extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit EB: Ducantur rectæ ex centro DA, DB, DF & DE. Quoniam latus hexagoni BF eſt baſis trianguli iſoſcelij BDF cuius angulus ad centrum BDF ſexta pars eſt quatuor *b* rectorum, ſeu tertia pars duorum rectorum. Ergo ſinguli anguli æquales ad baſim B & F *c* tertia pars

*a ex co. prop. 3. huius.*
*b prop. 5 huius.*
*c pr. 10. lib. 2.*

erunt duorum rectorum; & ideo triangulum DBF æquilaterum erit. quare latus hæxagoni BF, ſeu BE æquale erit radio circuli DB. Et angulus ad centrum ADB, cui ſubtenditur AB latus decagoni regularis, decima pars eſt quatuor rectorum, ſiue quinta pars duorum rectorum; ſuntque c tres anguli trianguli

c prop. 32. lib. 1. iſoſcelij ADB æquales duobus rectis: Ergo quilibet angulus DBA ad baſim æqualis eſt duobus quintis duorum rectorum; & propterea angulus DBA duplus eſt anguli ADB. ſed angulus ABD externus in triangulo DBE æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis angulis BDE

d prop. 6. lib. 1. & E (qui d ſunt æquales, cùm ſubtenſa latera EB, DB æqualia ſint, facta enim fuit EB æqualis radio circuli). Ergo angulus ABD duplus eſt anguli E, vti prius duplus erat anguli ADB & propterea anguli E & BDA æquales inter ſe ſunt, & eſt

e prop. 4. lib. 4. angulus A communis: e Ergo duo triangula EDA & DBA ſimilia ſunt, ideoque EA ad AD eſt, vt DA ad AB; eſtque EB æqualis radio DA: Ergo ſicut prius AD, ita nunc EB media proportionalis erit

f ex pr. 25. lib. 4 inter EA & BA; proptereaque f EA ſecta erit in B extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit EB latus hexagoni, & BA minus ſegmentum latus decagoni regula-

gulariũ in eodẽ circulo inſcriptorũ.

Secundò ex latere hexagoni EB, ſiue ex radio circuli auferatur recta BH æqualis ipſi BA lateri decagoni eiuſdem circuli. Dico EB ſecari in H extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit BH latus decagoni. Nam ex EB maiori ſegmento ipſius EA, ſectæ extrema, & media ratione, tollitur BH ſegmento minori BA æqualis. Ergo ipſa BE ſecatur quoque g extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius erit BH. Quod erat oſtendendum. g ex pr. 25. l. 4.

PROPOSITIO IX. *Circulo dato adſcribere duas figuras regulares inter ſe ſimiles, ita vt circunſcriptæ, vel inſcriptæ differentia à circulo minor ſit quacunque magnitudine propoſita.* Tabula V. Fig. 34. *Archim. prop. 5. lib. 1. de sphær. & cilindro.*

Sit datus circulus ABC, & quælibet ſuperficies X cuiuſcunque paruitatis. Debent circulo adſcribi imperatæ figuræ. Circunſcribatur a circulo ABC quadratum EH, & ad contactũ A coniungatur radius DA & vt b ſpatiũ X vna cum quadrato EH eſt ad quadratũ EH, ita c fiat quadratum radij AD ad quadratum rectæ lineæ DG, & ducatur d à puncto G recta GN perpendicularis ad diametrum, ſecans peripheriam in N, ſeceturque e ſemicirculi peri- a prop. 4. huius b prop. 21. lib. 4 c ex pr. 18. lib. 4 d prop. 10. lib. 1 e ex pr. 19. lib. 5

 phe-

pheria ACB bifariam, & rurſus bifariam, & ſic ſemper, quouſque *f* arcus AF minor ſit, quàm AN; Et ſecetur *g* arcus AO æqualis AF, coniungaturque recta FO, quæ *h* ſecabitur à radio AD in K bifariam, & perpendiculariter. Et quia tres rectæ SA, FK, NG perpendiculares ſunt ad radium DA, erunt *i* inter ſe parallelæ: cadit verò punctum F inter extremas parallelas AS, GN, eo quod arcus NA maior eſt, quam FA: Ergo punctum K cadit inter puncta A & G; & propterea recta DK maior erit, quàm DG. & ſicut AF metitur ſemiperipheriā AFB, ita *l* OF duplum ipſius AF metietur totam circuli peripheriam. Diſtribuatur iam tota circuli peripheria in partes CF, FO, OP, PQ, &c. inter ſe æquales; & coniungantur rectæ lineæ CF, FO, OP PQ, &c. atque *m* ijs parallelæ ducantur tangentes SR, RT, TL, &c. quouſque compleantur figuræ *n* regulares ſimiles, circunſcripta SRTV, inſcripta verò CFOPB. Patet figuram SRTV ad figuram CFOPB eſſe, vt quadratum radij illius DA ad quadratum radij DK huius; ſed *o* idem quadratum ex DA ad quadratum ex maiori DK minorem rationem habet, quàm ad quadratum ex minori DG, & vt quadratum ex DA ad quadratum ex DG, ita fuit ſum-

*f ex pr. 27. l. 2.*
*g ex pr. 16. lib. 2*
*h prop. 19. lib. 2*
*i prop. 14. lib. 1*
*l Ax. 1 lib. 3.*
*m Cor. prop. 16 lib. 1.*
*n ex pr. 4. huius*
*o prop. 2. lib. 3.*

ſumma ſpatij X, & quadrati EH ad quadratum EH: Ergo *p* figura SR TV ad figuram CFOPP minorem proportionem habet, quàm ſumma ſpatij X & quadrati EH ad quadratum EH; Et diuidendo *q* differentia figurarum SRTV & CFOB, ad figuram CFOB minorem proportionem habet, quàm ſpatium X habet ad quadratum EH; habet *r* verò idem ſpatium X ad inſcriptam figuram CFOB maiorem proportionem, quàm ad circunſcriptum quadratum EH, (cùm hoc maius ſit illo): Ergo differentia figurarum SRTV & CFOB ad figuram CFO B minorem proportionem habet, quàm ſpatium X ad eandem figuram inſcriptam CFOB; & propterea *ſ* differentia figurarum SRTV & CF OB minor erit ſpatio X. Cùmque *t* circulus ABC maior ſit figura inſcripta CFOB, & minor figura circunſcripta SRTV: erit exceſſus figuræ circunſcriptæ ſupra circulum, vel defectus figuræ inſcriptæ ab eodem circulo, minor, quàm ſit differentia figuræ circunſcriptæ SRT V, & inſcriptæ CFOB; Sed differentia harum figurarum adſcriptarum minor oſtenſa eſt magnitudine X. Igitur differentia circunſcriptæ figuræ SRTV, vel inſcriptæ CFO B ab eodem circulo ABC, minor eſt quacunque magnitudine pro-

*p prop. 6. lib. 3.*

*q ex pr. 14. lib. 3*

*r prop. 2. lib. 3.*

*ſ prop. 5 lib. 3.*

*t Axio hnius.*

poſita X. Quod erat faciendum.

EVCL. 1 XII. PROPOSITIO X. *Quæ in circuli poligona ſimilia, ſiue circunſcripta inter ſe, ſiue inſcripta inter ſe ſunt in duplicata ratione radiorum.* Tabula V. Fig. 35. 36.

Sint duo polygona ſimilia ABD & FGK inſcripta, ſiue circunſcripta circulis, quorum centra R & S. Dico inſcripta inter ſe, ſiue circunſcripta inter ſe habere proportionem duplicatam radiorum eorundem circulorum. Et primò in inſcriptis ducantur rectæ AC, HF ſubtendentes angulos æquales B & G, & coniungantur radij RA, RB, SF & SG. Quoniam circa angulos æquales B & G latera AB ad BC & FG ad GH ſunt proportionalia (propter ſimilitudinem figurarum) Ergo *a* triangula ABC & FGH ſimilia ſunt, ideoque anguli ACB & FHG æquales ſunt; ſed *b* anguli ad centrum R & S dupli ſunt angulorum ad peripheriam ACB & FHG: Ergo anguli R & S æquales ſunt, & circa eos latera, ſeu radij circuli ſunt in eadem ratione æqualitatis. Ergo *c* triangula ABR & FGS ſimilia ſunt; proptereaque, *d* vt AB ad GF, ita erit radius AR ad FS: & *e* eorum duplicatæ proportiones eædem quoque erunt: habet *f* verò polygonum ABD ad polygonum FGK

*a prop. 6 lib. 4.*
*b prop. 13. lib. 3*
*c prop. 6 lib. 4.*
*d ex pr. 4. l. 4.*
*e ex pr. 19. lib. 3*
*f prop. 17. l. 4.*

FGK duplicatam rationem lateris AB ad eius homologum FG. Ergo g proportio polygoni ABD ad polygonum FGK duplicata eſt proportionis radij AR ad radium FS. *g prop. 7. lib. 3.*

Secundo in figuris circunſcriptis ab angulis æqualibus A & F, atque ab æqualibns B & G ad centra iungantur rectæ AR, FS, BR, GS, & ad contactus N, O, X, Z radij coniungantur NR, OS, XR, ZS. Quoniam duo radij NR, XR æquales, atq; RB eſt communis oppoſitus angulis N, X rectis æqualibus: Ergo *h* in duobus triangulis BNR & BXR ſunt duo anguli RBN & RBX æquales, ideoque angulus RBN ſemiſſis erit anguli ABC. Eadem ratione in reliqua figura angulus SGO ſemiſſis eſt anguli polygoni FGH; Et quoniam duo anguli RBN & SGO æquales ſunt, cùm ſint ſemiſſes angulorum æqualium CAB & FGH & *i* ſunt duo anguli recti ad N & O æquales Ergo *l* duo triangula BNR & GOS ſimilia ſunt, ideoque BN ad EO erit, vt NR ad OS. Eadem ratione duo triangula ANR & FOS ſimilia erunt, ideoque AN ad FQ erit, vt eadem NR ad eandem OS: Quapropter *m* duæ AN & NB ſimul ad duas FO & OG, ideſt latus AB ad FG: erit vt radius NR ad radium OS, *n* & eorum duplicatæ propor- *h prop. 25. l. 1.* *i prop. 23. l. 2* *l ex pr. 4. lib. 4.* *m prop. 15. lib. 3.* *n ex pr. 19. l. 3.*

tio-

tiones eædem quoque erunt. Quare, vt prius, polygonum ADB ad polygonum FGK habebit proportionem duplicatam eius, quam habet radius NR ad radium OS. Quod erat propoſitum.

EVCL. 33.VI. PROPOSITIO XI. *In eodem, vel æqualibus circulis anguli ad centrum, ſiue ad peripherias, & ſectores eandem rationem habent cum peripherijs, quibus inſiſtunt.* Tabula V. Fig. 37.

In eodem, vel in circulis æqualibus ſint primò duo anguli ad centrum ABC & EBG, inſiſtentes peripherijs AC & EG. Dico eandem rationem habere arcum AC ad EG, quam habet angulus ABC ad angulum EBG. Secetur *a* arcus EG bifariam, & rurſus bifariam, & ſic ſucceſſiuè ſubdiuidantur arcus intercepti *b* quouſque perueniatur ad arcum EM, qui minor ſit quocunque arcu aſſignabili; Et *c* in arcu CA ſumatur arcus CS multiplex ipſius EM, ita vt eius exceſſus, vel defectus SA ab ipſa AC ſit æqualis, aut minor, quàm EM, & ideo minor quacunque data magnitudine; Et coniungantur radij BM, BS. Quoniam *d* quoties arcus EM metitur arcum EG, toties angulus EBM menſurat angulum EBG; pariterque

*a ex 19. lib. 2.*

*b ex pr. 27. l. 2*

*c ex pr. 16. l. 2.*

*d ex prop. 17. lib. 2.*

que quoties arcus EM menſurat arcum CS, toties angulus EBM menſurat angulum SBC: Igitur *e* arcus SC eædem partes erit arcus EG, quemadmodum angulus SBC eſt partes anguli EBG. Et *f* quoniam, ſi arcus SC æqualis eſt ipſi AC, neceſſariò angulus SBC æqualis eſt angulo ABC (Et tunc patet propoſitum). At ſi *g* arcus SC maior eſt, quàm AC, neceſſariò angulus SBC, maiori peripheriæ inſiſtens, erit maior quàm angulus ABC; Et ſi arcus SC minor fuerit, quàm AC, erit angulus SBC minor angulo ABC. Quare ſunt quatuor magnitudines arcus AC prima, at ſecunda eſt arcus EG; angulus ABC eſt tertia; & angulus EBG eſt quarta; & inſuper duæ aliæ magnitudines, ſcilicet arcus SC, & angulus SBC ſunt eædem partes conſequentium, ideſt ad eas habent eandem proportionem; & ſunt vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus, ita vt exceſſus, aut defectus à prima minor ſit quacunque aſſignabili quantitate. Ergo *h* arcus AC ad arcum EG eſt, vt angulus ABC ad angulum EBG; quod erat oſtendendum.

*e def. 6. lib. 5.*

*f ex pr. 27. l. 3.*

*g ex ead.*

*h prop. 24. l. 5.*

Secundò ſint ad peripheriam duo anguli ADC & EDG inſiſtentes peripherijs AC & EG eiuſdem, vel æqualium circulorum. Dico angulum ADC ad angulum EDG eſſe,

vt

vt arcus AC eſt ad arcum EG. Fiant anguli ad centrum ABC & EBG. Quia *i* angulus ADC ſemiſſis eſt anguli ad centrum ABC & angulus EDG ſemiſſis eſt anguli EBG. Ergo, *l* vt angulus ABC ad angulum EBG, ita eſt angulus ADC ad angulum EDG; ſed, vt angulus ABC ad angulum EBG, ita eſt peripheria AC ad peripheriam EG (ex prima parte huius.) Ergo, *m* vt angulus ADC ad angulum EDG, ita eſt peripheria AC ad peripheriam EG, quod erat ſecundum.

*i prop. 13 lib. 2* *l pr. 11. lib. 3.* *m pr. 7. lib. 3.*

Tertiò in eodem, vel æqualibus circulis dico ſectorem ABC ad ſectorem EBG habere eandem rationem, quam arcus AC, quæ eſt baſis illius, ad arcum EG, quæ eſt baſis alterius ſectoris, facta ſuperiori conſtructione, ea omnia, quæ dicta ſunt de angulis ad centrum intelligantur dicta de ſectoribus. Quapropter *n* ſector SBC erit eædem partes ſectoris EBG, quemadmodum angulus SBC partes eſt anguli EBG, ſeu arcus SC eſt partes arcus EG. Inſuper *o* arcus SC arcu AC, atque ſector SBC ſectore ABC vnà maiores, aut vnà minores erunt. Quare ſunt quatuor magnitudines arcus AC, arcus EG, ſector ABC & ſector EBG, atque duæ aliæ ſcilicet arcus SC, & ſector SBC ſunt eæ-

*n Def. 6. lib. 3.* *o ex pr. 17. lib. 2.*

eædem partes conſequentium, ſcilicet ipſius arcus EG, & ſectoris EBG, quæ denominantur à numero ex continua bipartitione conſequentium orto, & ſunt vnà excedentes, vel vnà deficientes à prima & tertia, ſcilicet ab arcu AC, & à ſectore ABC. Eſtque exceſſus ipſius SC à prima AC, vel defectus minor quolibet dato. Ergo *p* arcus AC ad arcum EG eandem rationem habet, quam ſector ABC ad ſectorem EBG. Quod erat poſtremo loco oſtendendum. *p pr.14. lib. 3.*

PROPOSTIO XII. *Circuli inter ſe ſunt in duplicata ratione radiorum.* EVCL. 2, XII.

Tabula V. Figura 38.

Sint duo circuli R & S, eorumque radij AE & FK, quorum tertius proportionalis ſit X. Dico circulum R ad circulum S habere duplicatam proportionem eius, quam habet radius AE ad radium FK, ſeu eandem, quam AE habet ad X. Adſcribantur *a* circulo R duo polygona regularia ſimilia ABCD & MNOP; ita vt exceſſus figuræ MNOP circumſcriptæ ſupra circulum, & defectus figuræ ABCD inſcriptæ ab eodem circulo R minor ſit quacunque magnitudine propoſita; poſtea *b* adſcribantur circulo S duæ figuræ FGHI & QOVT ſimiles ipſis figuris ABCD & MNOP: erunt *a prop. 9. huius* *b ex pr. 4. huius*

*c* ſi-

*c pr 10. huius.* c ſimiles figuræ circunſcriptæ MN OP & QOVT inter ſe, nec non ſimiles figuræ inſcriptæ ABCD & FGHI inter ſe in duplicata ratione *d prop 7 lib. 3.* radij EA ad radium KF, ſeu *d* vt AE ad X. Et quoniam circulus S minor eſt polygono TOV ei circunſcripto. *e pr 2. lib. 3.* Ergo polygonum *e* MNO ad circulum S maiorem proportionem habet, quàm ad polygonum TOV; habet verò polygonum MNO ad polygonum QOV eandem proportionem, quam AE ad X. *f pr. 6. lib. 3.* Ergo *f* polygonum MNO, (id eſt quantitas excedens circulum R exceſſu minore quocunque dato) maiorem proportionem habet ad circulum S, quam AE ad X. Similiter quia circulus S maior eſt polygono ei inſcripto FGH; Ergo *g prop. 2. lib. 3.* *g* polygonum ABC ad circulum S minorem proportionem habet, quàm ad polygonum FGH: habet autem polygonum ABC ad polygonum FGH proportionem eandem, quam AE ad X. *h prop. 6. lib. 3.* Ergo *h* polygonum inſcriptum ABC (minor circulo R defectu minori quocunque dato) minorem proportionem habet ad circulum S, quàm AE ad X; ideoque *i Schol. prop. 24 lib. 3.* *i* circulus R ad circulum S eandem duplicatam proportionem habebit radij AE ad radium FK. Quod erat oſtendendum.

PRO-

PROPOSITIO XIII. *Circulus æqualis eſt triangulo, cuius baſi æqualis eſt peripheriæ circuli, altitudo verò æqualis radio circuli.* Tabula V. Fig. 39. *Archi. de circ. menſ. prop. 1.*

Sit circulus X, cuius radius XB, & triangulum HKM, cuius baſis KM aqualis ſit integræ peripheriæ ABD, & altitudo, ſeu perpendicularis HK æqualis ſit radio circuli XB. Dico circulum æqualem eſſe triangulo HKM. Adſcribantur *a* circulo X duo polygona regularia, & ſimilia EFG extra, & ABC intra ipſum, ita vt differentia eorum à circulo minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Poſtea *b* ducta XO perpendiculari à centro ad latus figuræ in ſcriptæ, coniungantur rectæ XF, XE & XA, & *c* fiat KN æqualis perimetro circunſcripti polygoni EFGI & KS æqualis perimetro figuræ ABCD & RK æqualis perpendiculari XO, & coniungantur rectæ HN & RS. Quoniam *d* polygonum regulare EFGI diuiditur in tot triangula iſoſcelia æqualia inter ſe, verticem in centro X habentia, quot ſunt eius latera: ſunt verò dicta triangula æquè alta, quia eorum altitudines ſunt radij æquales ipſi XL, ſeu HK. Ergo *e* polygonum EFGI eſt tam multiplex trianguli EXF, quàm perimeter eiuſdem polygoni eſt multiplex

*a prop. 9 huius.*

*b prop. 11. l. 1.*

*c prop. 3 lib. 2.*

*d ex pr. 3. huius.*

*e Def. 5. lib. 3.*

vnius

vnius lateris EF; ſed KN eſt æqualis perimetro EFGI dicti polygoni. *f prop. 5. lib. 3.* Ergo, *f* vt KN ad EF, ita eſt polygonum EFGI ad triangulum EXF; *g prop. 1. lib. 4.* ſed *g* triangulum KHN ad triangulum EFX (cùm habeant æquales altitudines, ſcilicet perpendiculares XL & HK) eſt, vt baſis KN ad baſim EF. *h prop. 7. lib. 3.* Ergo *h* polygonum EFGI, & triangulum HKN eandem rationem habent ad triangulum EXF, *i prop. 4 lib. 3.* ideoque *i* illa æqualia ſunt inter ſe. *l Ax. huius.* Deinde *l* quia rectæ lineæ inflexæ IEL, extra circulum cadentes, maiores ſunt, quàm arcus IAL: ergo perimeter figuræ FGI maior erit, quàm tota peripheria circuli X comprehenſi; ſed KN æqualis poſita fuit perimetro EFGI & KM æqualis peripheriæ circuli X. Ergo KN maior eſt, quàm KM. Sed triangula HKN & HKM ſunt æquè alta. *m ex prop. 3. lib. 1.* Ergo *m* triangulum HKN maius erit triangulo HKM, ſicuti polygonum EFGI maius eſt circulo X. Similiter oſtendetur polygonum ABCD æquale triangulo RKS, *n prop. 1. lib. 4.* *n* eo quod baſis KS æqualis ponitur perimetro dicti polygoni, & altitudines RK & XO ſunt etiam æquales; *o Ax. huius.* eſtque *o* perimeter polygoni ABCD inſcripti, ſeu ei æqualis KS minor periferia circuli X, ſeu ei æquali KM, & altitudo RK, ſeu XO minor altitudine HK, ſeu

ra-

radio XL. Ergo triangulum RKS minus eſt triangulo HKM, ſicuti polygonum ABCD minus eſt circulo X. Iam cum polygonum FEG æquale ſit triangulo HKN, & triangulum HKN maius ſit triangulo HKM. Ergo circunſcripta figura FEG; (quæ eſt maior circulo X exceſſu minori quocunque dato) eſt quoque maior triangulo HKM. Similiter cum figura ABD æqualis ſit triangulo RKS, & triangulum RKS minus ſit triangulo HKM. Ergo inſcripta figura ABD (quæ minor eſt circulo X defectu minori quocunque dato) eſt quoque minor triangulo HKM. Et propterea *p* circulus X æqualis eſt triangulo HKM. Quod erat oſtendendum. *p ſchol. prop. 14. lib. 5.*

*Corollarium.* Patet triangulum, cuius baſis æqualis ſit perimetro cuiuſlibet figuræ regularis, & altitudo æqualis ſit perpendiculari à centro figuræ ad eius latus ductæ æquale eſſe eidem regulari figuræ. Oſtenſum enim fuit triangulum HKN, habens dictas conditiones, æquale polygono regulari EFGI.

PROPOSITIO XIV. *Peripheria inter ſe eandem rationem habent, quam radij eorundem circulorum.* *Pappi lib. 5.*
Tab. VI. Fig. 1.
Sint circuli R & S, quorum radij

RA, SC. Dico, vt radium RA ad radium SC, ita eſſe peripheriam ABA ad peripheriam CDC. Intelligatur triangulum V, cuius baſis FG æqualis ſit peripheriæ ABA, & altitudo EF æqualis ſit radio RA. Similiter intelligatur triangulum X, cuius baſis KM æqualis ſit peripheriæ CDC, & altitudo HK æqualis ſit radio SC. Patet *a* triangulum V æqualem eſſe circulo R, atque triangulum X eſſe æquale circulo S, ideoque *b* triangulum V ad triangulum X erit, vt circulus R ad circulum S. Et quia circulus *c* R ad circulum S duplicatam rationem habet eius, quam habet radius RA ad radium SC: Ergo *d* triangulum V ad triangulum X duplicatam rationem habet eius, quam habet RA ad SC, ſeu *e* duplicatam rationem eius quam habet altitudo EF ad altitudinem HK (cum RA, EF inter ſe, & SC, HK inter ſe æquales factæ ſint) cumque *f* proportio trianguli V ad triangulum X ſit compoſita ex ratione lateris EF ad latus HK, & ex ratione baſis FG ad baſim KM, cùm ſint circa angulos rectos F, K, æquales: Ergo *g* proportio baſis FG ad baſim KM eadem eſt, quam EF habet ad HK, *h* ſeu quam RA habet ad SC. Eſtque FG æqualis peripheriæ ABA, & KM æqualis peripheriæ CDC.

*a* pr. 13 huius.
*b* prop. 3. lib. 3.
*c* pr. 13 huius.
*d* pr. 7. lib. 3.
*e* prop. 3. lib. 3.
*f* Prop. 13. l. 4.
*g* ex pr. 19. l. 3.
*h* prop. 3. lib. 3.

C. Ergo i peripheria ABA ad peripheriam CDC eandem rationem habet, quam radius RA ad radium SC. Vt erat propoſitum. 1 prop. 7. lib. 3.

PROPOSITIO XV. *Si duorum circulorum ſegmenta comprehendant angulos æquales, erunt ſuis circulis proportionalia, & inter ſe rationem habebunt duplicatam ſubtenſarum vel radiorum, & eorum peripheriæ erunt inter ſe, vt ſubtenſæ, vel vt radij. Vocentur autem huiuſmodi* Segmenta ſimilia. Tab. VI. Fig. 2. Pappi 13. l. V.

Sint duo circulorum ſegmenta ABC & FGH, in quibus anguli B & G ſint æquales. Ductis radijs EA, EC, OF & OH. Dico ſegmentum ABC ad circulum ABCD eſſe, vt ſegmentum FGH ad circulum FGHK, & ſegmenta ABC, & FGH eſſe in duplicata ratione radiorum EA & OF, vel ſubtenſarum A C & F H; & peripherias ABC, FGH eſſe, vt AC ad FH. Quoniam anguli B & G ponuntur æquales: Ergo a eorum dupli ad centrum E & O ęquales erunt, ideoque b quatuor recti ad angulos æquales E & O eandem rationem habebunt; ſed, c vt quatuor recti ad angulum E, ita eſt circulus BAC ad ſectorem AECA, atque etiam, vt quatuor recti ad angulum O, ita eſt circulus GFH ad ſectorem FOK HF,

a prop. 13. lib. 2. b pr. 3. lib. 3. c ex pr. 11. hu.

*d prop. 7. lib. 3.* HF. Ergo, *d* vt circulus BAC ad ſectorem AECA ita erit circulus GFH ad ſectorem FOHF: & *e* permutando vt circulus ABD ad circulum FGK, ita erit ſector AECD ad ſectorem FOHK: ſed *f* circuli ſunt inter ſe in duplicata ratione radiorum EA ad OF. Ergo *g* ſectores in eadem duplicata ratione radij BA ad OF erunt. Sunt *h* verò triangula AEC & FOH ſimilia (cum ſint iſoſcelia, & habeant verticales angulos E & O æquales): Ergo *i* triangulum EAC ad triangulum OFH duplicatam rationem habet eius quam habet radius EA ad OF, vel ſubtenſa AC ad FH. Quare, *l* vt ſector EADC ad ſectorem OFKH, ita eſt triangulum EAC ad triangulum OFH: Vnde *m* reſiduum ſegmentum ACD ad ſegmentum FKH erit in eadem ratione ſectorum, vel circulorum; & propterea *n* reliquum ſegmentum ABC ad ſegmentum FGH erit quoque in eadem ratione circuli ABD ad circulum FGH, *o* ſeu in duplicata proportione radij EA ad radium OF, vel ſubtenſæ AC ad ſubtenſam FH.

*e prop. 12. lib. 3.*
*f prop. 12. hu.*
*g pr. 7. lib. 3.*
*h pr. 4. lib. 4.*
*i prop. 15. lib. 4*
*l prop. 7 lib. 3.*
*m prop. 15. lib. 3*
*n prop. 15. lib. 3*
*o prop. 7. lib. 3*

Tandem quoniam anguli ad centra AEC & FOH æquales ſunt. Ergo *p* tota circuli peripheria ABCA eſt ad arcum ADC vt ſunt quatuor recti ad angulum AEC, ſiue *q* ei æqualem angulum FOH: pariter-

*p ex pr. 1. hu.*
*q prop. 3. lib. 3.*

terque tota circuli peripheria FGH F ad arcum FKH eſt in eadem ratione, ac ſunt quatuor recti ad angulum FOH. *r* Ergo vt circuli peripheria ABCA ad arcum ADC ita erit peripheria circuli FGHF ad ad arcũ FKH. Et *ſ* permutando circuli peripheria ABD ad circuli peripheriam FGK eſt, vt arcus ADC ad arcum FKH, *t* ideoque reſidua peripheria ABC ad reſiduam FGH erit, vt tota ad totam; ſed *u* tota peripheria ABD ad totam peripheriam FGK eſt, vt radius EA ad radium OF, ſiue vt ſubtenſa AC ad ſubtenſam FH (eo quod fuit AC ad FH, vt EA ad OF) Ergo *x* peripheria ABC ad peripheriam FG H eſt vt ſubtenſa AC ad rectam ſubtenſam FH, ſiue vt radius AE ad radium FO, vt fuit propoſitum. Vocentur autem ſegmenta ABC & FGH capientia angulos æquales B & G inter ſe *Similia*.

*r prop. 7. lib. 3*

*ſ prop. 12. l. 3.*

*t prop. 15. lib. 3*

*u pr. 14 huius.*

*x prop. 7. lib. 3.*

*g ex pr. 25. l. 4.*

PROPOSITIO XVI. *In quolibet triangulo maior angulus ad minorem habet maiorem rationem, quàm latus maiori angulo oppoſitum ad latus oppoſitum angulo minori.* Tabula VI. Fig. 3.

*Ptol. Alm. l. 1. c. 9.*

In triangulo ABC ſit angulus C maior, & angulus A minor. Dico angulum C habere maiorem pro-

portionem ad angulum A, quàm latus AB habet ad latus BC *a* De-
*a ex pr. 1. lib. 2.* ſcribatur circa triangulum circulus ABC, & ſecetur arcus BC vtcunque in E; Et *b* fiat arcus BD æqualis BE; iunganturque rectæ lineæ CE, BE, AD, BD. Et quia *c* arcus ADB, cui maior angulus C inſiſtit, maior eſt, quàm BEC, & arcus BD, & BE ſunt æquales: Ergo reſiduus arcus AD maior erit reſiduo arcu CE, & ideo *d* angulus ABD maior erit angulo CBE. Fiat *e* iam angulus ABO æqualis minori angulo EBC: Igitur angulus ABD maior erit angulo ABO, & ideo recta BO ſecabit rectam AD in puncto O, poſito inter A & D, & ideo punctum O erit intra circuli ſegmentum ADB. Deſcribatur *f* iam per tria puncta A, O & B circuli peripheria AOB, cadet illa intra ſegmentum ADB; Et quoniam in triangulis AOB & CEB duo *g* anguli OAB, ECB æquales ſunt (cùm peripherijs æqualibus BD & BE inſiſtant); pariterque duo anguli OBA, EBC ſunt æquales: Ergo *h* reliqui anguli AOB & CEB æquales erunt; proptereaque *i* peripheria AOB ad peripheriam BEC erit, vt ſubtenſa AB ad rectam lineam BC eſt verò *l* arcus ADB maior, quàm arcus AOB, eo quod hic ab illo comprehenditur. Igitur *m* arcus ADB

*b ex pr. 16. l. 2.*
*c ex eadem.*
*d ex pr. 17. lib. 2.*
*e prop. 24. l. 1.*
*f ex pr. 1. lib. 2.*
*g ex pr. 17. lib. 2.*
*h ex pr. 18. lib. 1.*
*i prop. 15. hu.*
*l Axi. 10. hu.*
*m prop. 2. l. 3.*

maiorem rationem habet ad eundem arcum BC, quàm arcus AOB; & ideo *n* arcus ADB ad arcum BEC maiorem rationem habebit, quam recta linea AB ad rectã BC. Et eſt *o* angulus BCA ad angulum BAC, vt arcus ADB ad arcum BEC. Ergo *p* angulus BCA maiorem rationem habet ad angulum BAC, quàm ſubtenſa AB habeat ad rectã lineam ſubtenſam BC. Quod erat oſtendendum.

*n prop. 6. lib. 3.*

*o prop. 11. hu.*

*p prop. 6. lib. 3.*

PROPOSITIO XVII. *Inter duas figuras ſimiles regulares, vel circulos, aut ſectores ſimiles, medium proportionale eſt triangulum, cuius altitudo æqualis eſt radio vnius, baſis verò æqualis eſt perimetro alterius* Tab: VI. Fig. 4. 5.

Sint duæ quælibet figuræ regulares ſimiles inter ſe, vel duo ſectores ſimiles, aut duo circuli R & S, quorum radij RB & SE; ſitque triangulum rectangulum GHM, cuius altitudo GH æqualis ſit radio SE vnius figuræ S, & baſis HM æqualis ſit BAC perimetro figuræ R. Dico triangulum GHM medium proportionale eſſe inter figuras R & S. *a* Fiat altitudo NH æqualis radio RB & baſis HO æqualis perimetro EDF, & iungantur rectæ NM & GO. Quoniam in ſimilibus figuris regularibus vel in ſectoribus ſimilibus aut circulis R & S *b* vt radius

*a prop. 3. lib. 1.*

*b ex pr. 14. hu.*

dius RB ad radium SE, ita eſt perimeter ABC ad perimetrum DEF eſtque NH æqualis RB & GH æqualis SE; atque HM æqualis perimetro ABC nec non HO æqualis DEF. *c* Ergo vt NH ad GH, ita ſt MH ad HO; ſed *d* vt altitudo NM ad GH, ita eſt triangulum NHM ad GHM (cùm habeant eandem baſim HM); & *e* vt baſis MH ad baſim HO, ſeu *f* vt NH ad GH, ita eſt triangulum GHM ad triangulum GHO. Ergo triangulum GHM medium proportionale eſt inter duo triangula NHM, & GHO; eſt *g* verò triangulum rectangulum NHM æquale figuræ R, cùm contineatur à radio, & perimetro dictæ figuræ R: pariterque triangulum GHO eſt æquale figuræ S: Igitur *h* vt figura R ad triangulum GHN, ita eſt triangulum GHM ad figurã S, & propterea triangulũ GHM mediũ proportionale eſt inter figuras R & S. Quod erat oſtendendũ.

*c prop. 3. lib. 3.* *d ex pr. 2. lib 4.* *e prop. 1. lib. 4.* *f prop. 7. lib. 3.* *g ex pr. 13. hu.* *h pr. 3. lib. 3.*

EVCL. 47. I. 31 VI.

PROPOSITIO XVIII. *In triangulis rectangulis qualibet figura rectilinea, vel circularis ſuper hypothenuſa deſcripta æqualis eſt duabus figuris ſuper lateribus rectum angulum continentibus deſcriptis, quæ illæ ſimiles ſint, & ſimiliter poſitæ.* Tab. VI. Figura 6.

Sit triangulum ABC rectangulum in A & ſuper tribus eius lateribus de-

deſcribantur quælibet tres figuræ X, R & S inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ, ſiue ſint circuli, ſiue ſecto- res, ſiue ſegmenta, ſiue zonæ, ſiue figuræ rectilineæ. Oſtendendum eſt figuram X ſuper hypothenuſam BC deſcriptam æqualem eſſe duabus figuris R & S illis ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis ſuper lateribus BA & AC. Ducatur *a* ab angulo recto A perpendicularis AD ſuper BC. Manifeſtum eſt *b* CB ad BD duplicatam rationem habere eius, quam habet CB ad BA; pariterque BC ad CD duplicatam rationem habebit eius, quam habet BC ad CA. Et quoniam *c* X ad R (cùm ſint figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ) duplicatam rationem habet lateris BC ad eius homologum BA: Ergo *d* X ad R eſt, vt CB ad BD. Eadem ratione figura X ad figurã S eandem proportionem habebit, quã BC ad CD: Ergo *e* figura X ad duas figuras R & S eandem rationem habebit, quam BC ad duas BD & DC ſimul ſumptas; ſed BC æqualis eſt duabus BD & DC. Ergo *f* figura X æqualis eſt duabus figuris R & S ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

*a prop. 11. l. 1.*
*b prop. 9. lib. 4. & pr. 19. lib. 3*
*c pr. 17. lib. 4.*
*d ex pr. 19. l. 3.*
*e ex pr. 22. lib. 3*
*f ex pr. 16. l. 3.*

PROPOSITIO XIX. *Qualibet figura ſiue circularis ſiue rectilinea ſuper ſummam duarum rectarum de-* EVCL. 4. l. 11.

*ſcripta, æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper eis, vna cum duplo ſpatij medij proportionalis inter eaſdem*. Tab. VI. Figura 7.

Super AB, BC & ſuper ambas in directum poſitas deſcriptæ ſint figuræ rectilineæ ſimiles & ſimiliter poſitæ, ſiue circuli, aut ſectores, vel zonæ R, S & M. Dico figuram M æqualem eſſe figuris R & S vna cum duplo ſpatij medij proportionalis inter R & S. Super diametro AC deſcribatur ſemicirculus in quo eleuata perpendiculari BD & coniunctis AD, DC ſuper eas deſcribantur figuræ X, Y & Z ſimiles & ſimiliter poſitæ prioribus R, S, M. Quoniam in triangulo ADC *a* rectangulo in D *b* quælibet figura M, ſuper hypothenuſa AC deſcripta, æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus X & Y ſuper lateribus AD & DC ſimiliter deſcriptis; ſed *c* in triangulo ABD rectangulo in B figura X ſuper hypothenuſa AD deſcripta æqualis eſt duabus figuris R & Z illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper lateribus AB & DB: pariterque in triangulo DBC rectangulo in B figura Y ſuper DC deſcripta æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus S & Z, & ſimiliter poſitis ſuper CB & DB. Ergo figura M æqualis eſt figuris illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis R & S,

*a prop. 20. l. 2.*
*b prop. 18. hu.*
*c prop. 18. hu.*

&

& duplo figuræ Z. Eſtque figura Z media proportionalis inter R & S eo quod tres eorum radij vel latera homologa AB, BD, BC ſunt continuæ proportionalia. Ergo figura M æqualis eſt figuris R, S & duplo medij proportionalis Z inter R, S. Quod erat &c.

*Corollarium* Si duæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale duobus quadratis ex datis rectis, & duplo parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis contenti. Nam *d* quadrata ſunt figuræ ſimiles, cum ſint regulares: vnde ex hac propoſitione, quadratum M æquale erit duobus quadratis R & S vnà cum duplo quadrati Z; ſed *e* quadratum Z æquale eſt rectangulo parallelogrammo ABC (eò quòd perpendicularis BD media proportionalis eſt inter AB & BC). Ergo quadratum M ex aggregato æquale eſt duobus quadratis R & S ex rectis datis, vnà cum duplo rectanguli ABC ſub rectis datis contenti.

EVCL. 4.II.

d *prop. 3. huius*

e *ex pr. 14. lib. 4*

PROPOSITIO XX. *Si ſuper duabus rectis lineis, & ſuper earum differentia, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit figura ex differentia æqualis differentiæ duarum figurarum ex illis rectis à duplo ſpatij medij*

*proportionalis inter eaſdem*. Tabula VI. Fig. 8.

Sit recta AB maior, & BC minor, earunque differentia AC, & in ſemicirculo ADB deſcripto ſuper AB, eleuata ſit perpendicularis CD, & ducta DB, atque ſuper AB, BC, AC, BD, CD, deſcriptæ ſint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles & ſimiliter poſitæ vt in præcedenti propoſitione factum eſt erit (ex 9. l. 4.) BD media proportionalis inter AB & BC; & ideo (ex 18. l. 4.) figura Z erit media proportionalis inter figuras R & S. Dico figuram M ex differentia AC deſcriptam, æqualem eſſe exceſſui quo duæ figuræ R & S ſuperant duplum figuræ Z. Quoniam *a* figura R ex ſumma ipſarum AC & CB æqualis eſt ſummæ figurarum S, M, & duplo figuræ Y ex media proportionali inter AC & CB. Ergo addita communi figura S: erunt figuræ R & S ſimul ſumptæ, æquales figuræ M duplo figuræ Y, & duplo figuræ S, ſimul ſumptis. Sed in *b* triangulo rectangulo BCD, duplũ figuræ Z ex hypothenuſa æquale eſt duplo figuræ S vnà cùm duplo figure Y. Igitur duæ figuræ R & S, ſimul ſumptæ, æquales ſunt figuræ M vnà cum duplo figuræ Z; & ablato communiter duplo figuræ Z, erit figura M ex differentia AC, æqualis

*a prop. 19. hu.*

*b pr. 18. huius.*

lis

Iis exceſſui duarum figurarum R & S ſupra duplum figuræ Z quæ eſt media proportionalis inter R & S. Quod erat oſtendendum.

*Corollarium* Manifeſtum eſt, ſi dictæ figuræ fuerint quadrata, eſſe quadratum, ſuper differentia datarum linearum deſcriptum, æquale differentiæ inter duo quadrata ſuper eiſdem lineis deſcripta, & duplum parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis lineis contenti. EVCL. 7. II.

Nam ex hac propoſitione quadratum M æquale eſt exceſſui duorum ei ſimilium quadratorũ R & S ſupra duplum quadrati Z; ſed *c* quadratum Z æquale eſt rectangulo A BC (eo quod *d* DB media proportionalis eſt inter rectas AB & BC propter perpendicularem DC) Ergo quadratum M æquale eſt exceſſui quadratorum R & S ſupra duplum rectanguli ABC.

*c ex pr. 14. lib. 4*

*d prop. 9. lib. 4.*

PROPOSITIO XXI. *Si ſuper duabus rectis, & ſuper aggregato, & differentia earundem rectarum linearum deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit figura ex aggregato æqualis figuræ ex differentia vnà cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſuper inæquales rectas deſcriptas.* Tab. VI. Fig. 9.

Sit rurſus recta linea AB maior, & BC minor, & ſit BD æqualis minori BC; erit AC aggregatum, & differentia AD, ſitque BE media proportionalis inter AB & BC, & ſuper eas deſcriptæ ſint figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ R, S, M, N & Z. Dico figuram M ex aggregato æqualem eſſe figuræ N ex differentia, vnà cum quadruplo figuræ Z quæ eſt media proportionalis inter figuras R & S. Quoniam *a* figura M ex aggregato ipſarum AB & BC æqualis eſt figuris R & S cum duplo figuræ Z; atque *b* duæ figuræ R & S æquales ſunt figuræ N ex differentia AD vnà cum duplo figuræ Z. Ergo figura M æqualis eſt figuræ N, & quadruplo figuræ Z, ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

*a prop. 19. hu.*

*b prop. 20. hu.*

EVCL, 8.II. *Corollarium* Manifeſtum eſt, quòd ſi dictæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale quadrato ex differentia datarum linearum deſcripto, vnà cum quadruplo paralellogrammi rectanguli ſub inæqualibus rectis datis contenti. Nam quadrata R, S, N, M & Z ſunt figuræ ſimiles; & ideo (ex hac propoſitione) quadratum M æquale erit quadrato N vnà cum quadruplo quadrati Z mediæ proportionalis BE inter inæquales rectas AB &

BC;

BC; eſtque *c* parallelogrammum rectangulum ABC æquale quadrato Z. Ergo quadratum M æquale eſt quadrato N vnà cum quadruplo rectanguli ABC. *c ex prop. 14 lib. 4.*

PROPOSITIO XXII. *Si ſuper duas rectas lineas inæquales, atque ſuper media proportionali inter aggregatum, differentiamque earundem, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit differentia figurarum ex inæqualibus rectis lineis deſcriptarum æqualis figura ex illa media proportionali deſcripta.* Tabula VI. Fig. 10.

Sint duæ rectæ AB maior, & eius portio AC, & *a* ipſi AC addatur DA æqualis maiori AB, erit DC ſumma, & CB differentia ipſarum AB & AC; ponaturque *b* CE in ſemicirculo BED perpendicularis & media proportionalis inter DC & CB; & ſuper AB, AC, CE deſcriptæ ſupponantur figuræ R, S & M circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico exceſſum figuræ R ſupra figuram S æqualem eſſe figuræ M, coniungatur recta AE ſuper quam deſcribatur figura O ſimilis & ſimiliter poſita ac ſunt R, S & M. Et quia *c* in triangulo AEC rectangulo in C figura O æqualis eſt figuris S & M ſimul ſumptis; ſuntque radij circuli AB, AE

*a prop. 3 lib. 1.*

*b prop. 10. l. 4.*

*c prop. 18. h.*

AE æquales, ergo figura R æqualis eſt ei ſimili figuræ O; & proinde figura R erit æqualis duabus figuris S & M. Quare differentia figurarum R & S æqualis erit figuræ M ex media, proportionali inter DC ſummam & CB differentiam duarum in æqualium BA & AC. Quod erat &c.

EVCL. 5.6 II. *Corollarium* Manifeſtum eſt differentiam duorum quadratorum æqualem eſſe parallelogrammo rectangulo contento ſub differentia, & aggregato laterum. Nam quadrata ſunt figuræ ſimiles; & ideo, ex hac propoſitione, exceſſus quadrati R ſupra quadratum S æqualis eſt quadrato M ex EC media proportionali inter aggregatum DC, & differentiam CB eorundem laterum AB, AC deſcripto; ſed quadrato *d* M æquale eſt parallelogrammum rectangulum DCB, cùm hoc ab extremis: illud verò ex media trium proportionalium DC, CE, CB facta ſint. Ergo exceſſus quadrati R ſupra quadratum S æqualis eſt rectangulo ſub CB differentia laterum, & ſub DC aggregato eorundem BA & AC contento.

*d ex prop. 14. l. 4.*

EVCL. 9. 10. PROPOSITIO XXIII. *Si ſuper duabus rectis lineis inæqualibus, & earum aggregato, atque differentia deſ-*

*deſcriptæ fuerint quælibet circulares, vel rectilineæ figuræ inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erunt duæ figuræ ex aggregato, & ex differentia, ſimul ſumptæ, æquales duplo figurarum ab inæqualibus lineis datis deſcriptarum* Tabula VI. Fig. 11.

Super duabus rectis lineis inæqualibus AB & BC, & earum aggregato AC, earumque differentia AD ſint deſcriptæ quælibet circulares, aut rectilineæ inter ſe ſimiles figuræ, & ſimiliter poſitæ R, S, M & N. Dico duas figuras M ex aggregato, & N ex differentia datarum, ſimul ſumptas, æquales eſſe duplo figuræ R vnà cum duplo figuræ S, ex datis lineis deſcriptarum. Quoniam *a* figura M æqualis eſt figuræ N vnà cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter R & S: Ergo addita communiter figura N, erunt figuræ M & N æquales ſex ſpatijs, ſcilicet duplo figuræ N, & quadruplo medij proportionalis inter figuras R & S; ſunt *b* verò figuræ R & S ex inæqualibus rectis AB, BC deſcriptæ æquales figuræ N ex differentia vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R & S: Ergo duplum figuræ R, vnà cum duplo figuræ S æquale eſt ijſdem ſex ſpatijs, ſcilicet duplo figuræ N vnà cum quadruplo medij proportionalis inter figuras R & S. Quare figu-

*a prop. 21. hu.*

*b prop. 20. hu.*

ræ M & N ex aggregato, & differentia deſcriptæ æquales ſunt duplo figuræ R vna cum duplo figuræ S, quæ ex inæqualibus datis rectis AB & BC deſcribuntur. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 4.XIII. PROPOSITIO XXIV. *Si ſuper tota, & ſuper ſegmentis rectæ lineæ extrema, ac media ratione diuiſæ deſcripta fuerit figura circulares, vel rectilineæ ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſita, quæ ex tota, & minori ſegmento vtræque ſimul triplæ ſunt figuræ ex maiori ſegmento deſcriptæ. Et è conuerſo.* Tabula VI. Fig. 12.

Sit recta AB ſecta extrema, & media ratione in C, cuius ſegmentum maius AC: & deſcriptæ ſint ſuper AB, AC & CB tres circulares, aut rectilineæ figuræ R, M & S inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram R ex tota, vna cum figura S, ex minori ſegmento, triplas eſſe figuræ M ex maiori ſegmento deſcriptæ. Quoniam ſuper duas rectas inæquales AB & BC, atque earum differentiam AC deſcriptæ ſunt tres figuræ R, S & M ſimiles, & ſimiliter poſitæ: Ergo *a* duæ figuræ R & S ſuper inæqualibus rectis AB, BC deſcriptæ æquales ſunt figuræ M ex differentia AC, vnà cum duplo ſpatij medij proportionalis inter figuras R & S: Eſtque *b* figura M media

*a pr. 20 huius.*

*b ex pr. 28, l. 4.*

dia

dia proportionalis inter figuras R & S ei ſimiles; propterea quod tres rectæ AB, AC, CB proportionales ſunt.. Ergo figuræ R & S æquales ſunt triplo figuræ M.

Secundò ſint figuræ R & S ex tota AB, & minori ſegmento CB, ſimul ſumptæ, triplæ figuræ M illis ſimili, & ſimiliter poſitæ ex maiori ſegmento AC. Dico rectam AB ſectam eſſe in C extrema, & media ratione. Quoniam c duæ figuræ R & S æquales ſunt figuræ M, ex differentia, vna cum duplo medij proportionalis inter R & S; erant autem duæ figuræ R & S æquales triplo figuræ M: Ergo triplum figuræ M æquale eſt figuræ M, vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R & S; & ablata communi figura M, erit duplum figuræ M æquale duplo medij proportionalis inter figuras R & S; ideoque figura M æqualis erit ſpatio medio proportionali inter figuras ei ſimiles R & S. Quare d figurarum R, M, S tria homologa latera AB, AC & CB proportionalia erunt; & e propterea recta AB ſecta erit in C extrema, & media ratione. Vt erat propoſitum.

*c pr. 20 huius.*

*d ex pr. 18. l. 4.*

*e prop. 5. lib. 4.*

PROPOSITIO XXV. *Si ſuper aggregato totius & minoris ſegmenti, atque ſuper maiori ſegmento recta linea*

*EVCL. 6. XIII.*

*nea*

*rea extrema, ac media ratione diuiſa, deſcriptæ fuerint figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſita, quæ ex aggregato deſcribitur figura quintupla eſt eius, quæ ex maiori ſegmento deſcribitur. Et è conuerſo.* Tabula VI. Fig. 13.

Sit recta linea AB ſecta extrema, & media ratione in C, cuius ſegmentum minus CB; producaturque BD æqualis minori ſegmento CB; atque ſuper AD aggregato duarum AB & BC, atque ſuper differentia earum, ſeu maiori ſegmento AC, factæ ſint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ R & M inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram R quintuplam eſſe figuræ M. Quoniam *a* figura R ex AD aggregato inæqualium rectarum A B & BD, ſeu BC, æqualis eſt figuræ M ex AC illarum differentia vna cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſuper inæquales AB & BC, quæ ſimiles ſint, & ſimiliter poſitæ ipſis R & M. Eſtque *b* figura M media proportionalis inter figuras ei ſimiles ſuper AB & BC ſimiliter deſcriptas (cùm recta AC media proportionalis ſit poſita inter AB & BC). Ergo figura R quintupla eſt figuræ M.

*a pr. 21. huius.*

*b ex pr. 18. lib. 4*

Secundò ſit figura R ſuper aggregato totius AB, & ſegmento CB deſcripta, quintupla figuræ M ſimilis ipſi

ipſi R, quæ ſuper earum differentia AC ſimiliter deſcribitur. Dico rectam AB ſectam eſſe extrema, & media ratione in C, cuius minus ſegmentum erit CB. Quoniam *c* figura R ex aggregato deſcripta æqualis eſt figuræ M ex differentia vna cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſimiles eis, & ſimiliter poſitas ſuper rectas AB & BC; & ex hypotheſi figura R æqualis eſt quintuplo figuræ M: Ergo quintuplum figuræ M æquale eſt figuræ M vnà cum quadruplo dicti ſpatij medij proportionalis; & ablata communi figura M: erit quadruplum figuræ M æquale quadruplo dicti ſpatij medij proportionalis; ideoque figura M æqualis erit ſpatio medio proportionali inter figuras ei ſimiles ſuper AB & BC ſimiliter deſcriptas; proptereaque *d* tres rectæ BA, AC & CB proportionales erunt; & *e* AB ſecta erit in C extrema, & media ratione. Quod erat oſtendendum.

*c prop. 21. huius.*

*d ex pr. 18. l. 4. e pr. 25 lib. 4.*

PROPOSITIO XXVI. *Si ſuper aggregato minoris, & ſemiſſis maioris, atque ſuper ſemiſſe maioris ſegmentorum eiuſdem recta linea extrema, ac media ratione diuiſæ, deſcriptæ fuerint duæ circulares; aut rectilineæ figuræ inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ:, quæ ex aggregato deſcri-*

EVCL. 3. XIII.

*deſcribitur figura quintupla eſt eius, qua ex ſemiſſe maioris ſegmenti deſcribitur. Et è conuerſo.* Tabula VI. Figura 14.

Sit tota recta BA ad AC, vt AC ad minus ſegmentum CB; & ſecta ſit AC bifariam in D; atque ſuper BD aggregato ſegmenti minoris B C & DC ſemiſſe maioris; nec non ſuper DC ſemiſſe maioris deſcriptæ ſupponantur quælibet figuræ R & M circulares, vel recti lineæ ſimiles inter ſe & ſimiliter poſitæ. Dico figuram R quintuplam eſſe figuræ M. Secetur *a* CB bifariam in E. Et quia *b* DC ad CE eſt, vt AC duplum primæ ad CB duplum ſecundæ; & eſt AB ſecta in C extrema, & media ratione. Ergo *c* DE quoque in C ſecatur extrema, & media ratione, cuius ſegmentum minus erit CE. Cumque ſint deſcriptæ duæ figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, R quidem ſuper DB aggregato totius DE & EB, ſeu E C minoris ſegmenti; atque figura M ſuper maiori ſegmento DC. Ergo *d* figura R quintupla eſt figuræ M. Quod erat primum.

*a prop. 9 lib. 1.*
*b prop. 11. l. 1.*
*c pr. 25. huius.*
*d pr. 25 huius.*

Secundò ſit figura R, ſuper DB aggregato ſegmenti minoris CB, & DC deſcripta, quintupla figuræ M illi ſimili ſuper DC ſemiſſe maioris ſegmenti AC ſimiliter deſcriptæ. Dico rectam totam AB ſectam eſſe

in

in C extrema, & media ratione. Secta *e* CB bifariam in E. Quia figura R ſuper aggregato totius D E, & minoris ſegmenti CE, ſeu E B deſcripta, quintupla ponitur figuræ M, ſimili priori, ſuper maiori ſegmento DC ſimiliter deſcriptæ. Ergo *f* recta DE in C ſecatur extrema, & media ratione; ſed, *g* vt DC ad CE, ita eſt AC dupla primæ ad CB duplam ſecundæ. Ergo *h* recta AB quoque ſecatur in C extrema, & media ratione, cuius ſegmentum minus eſt CB. Quod erat oſtendendum.

*e prop. 9. lib. 1.*
*f pr. 25. huius.*
*g prop. 11. lib. 3*
*h prop. 26. l. 4.*

PROPOSITIO XXVII. *Si ſuper aggregato ſemiſſis totius, eiuſque ſegmenti maioris atque, ſuper eadem ſemiſſe recta linea diuiſa extrema, ac media ratione, deſcripta ſint duæ qualibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitæ; quæ ex aggregato deſcribitur figura, quintupla eſt eius, quæ ex ſemiſſe totius deſcribitur, figura. Et è contra.* Tab. VI. Fig. 15.

EVCL. 1. XIII.

Sit recta linea AB ſecta in C extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius AC; & producta ſit AD æqualis medietati totius AB; atque ſuper DC aggregato ſegmenti maioris AC & DA ſemiſſe totius, nec non ſuper DA ſemiſſe totius deſcriptæ ſupponantur duæ figuræ

circu-

circulares, vel rectilineæ R & M ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitę. Dico figuram R ex aggregato quintuplam eſſe figuræ M ex ſemiſſe totius deſcriptæ. Secetur *a* A C bifariam in E, & quia *b* DA ad AE eſt, vt BA duplum primæ ad AC duplum ſecundæ; eſtque AB ſecta in C extrema, ac media ratione. Ergo *c* DE quoque in A extrema, ac media ratione ſecatur, cuius ſegmentum minus eſt AE; Cùmque duæ figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, R quidem deſcripta eſt ſuper aggregato totius DE, eiuſque minoris ſegmenti EC, vel AE; & figura M deſcripta eſt ſuper eius maiori ſegmento DA. Ergo *d* figura R quintupla eſt figuræ M. Quod erat primum.

*a prop. 9. l. 1.*
*b prop. 11. l. 1.*
*c prop. 26. l. 4.*
*d prop. 25. huius*

Secundò figura R ſuper DC aggregato ipſius DA ſemiſſis totius A B, & ſegmenti maioris AC deſcripta, quintupla ſit figuræ M illi ſimili ſuper DA ſemiſſe totius AB ſimiliter deſcriptæ. Dico totam rectam lineam AB ſectam eſſe in C extrema, & media ratione. Secetur *e* A C bifariam in E. Et quoniam figura R ſuper DC aggregato totius D E, eiuſque ſegmenti minoris EC, vel AE deſcripta, quintupla eſt figuræ M ei ſimili ſuper differentia, vel maiori ſegmento D A deſcriptæ: Ergo *f* DE ſecatur in A extrema, & me-

*e prop. 9 lib. 1.*
*f prop. 15. huius*

ıedia ratione; ſed, g vt DA ad A , ita eſt BA dupla primæ ad AC uplam ſecundæ. Ergo h ſimiliter ęcta AB ſecatur in C extrema, & ıedia ratione, cuius maius ſegmenım eſt AC. Quod erat oſtendenum.

g prop. 11. l. 3.

h prop. 26. lib. 4

ROPOSITIO XXVIII. *Si ſuper tribus lateribus trianguli ambligonij, atque ſuper media proportionali inter latus circa angulum obtuſum, eiuſque productionem vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere obtuſum angulum ſubtendente æqualis ſummæ figurarum ex reliquis lateribus, vnà cum duplo figuræ ex illa media proportionali deſcriptæ.* Tabula VI. Figura 16.

In triangulo ABC ſit angulus C obtuſus, & a ab angulo C ducta D perpendiculari ſupra AB ſecaneam in D. Patet b perpendiculan CD cadere extra triangulum, partes acuti anguli CBD; & ſiat BE media proportionalis inter AB BD, & ſuper lateribus AC, BC, B, BE, AD, BD & CD deſcriptæ t quælibet figuræ circulares, vel ctilineæ X, S, R, Y, M, Z & N in ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. ico figurā X latere ex ſubtendenre

a prop. 11. l. 1.

b expr. 18. l. 3.

c prop. 10. l. 4.

te obtuſum angulum deſcriptam, æqualem eſſe duabus figuris R & S ex lateribus continentibus angulum obtuſum, vnà cum duplo figuræ Y ex BE media proportionali inter AB & BD. Quia in triangulo ADC rectus eſt angulus D. Ergo *d* figura X æqualis eſt duabus figuris M & N; ſed figura *e* M ex AD aggregato rectarum AB & BD æqualis eſt duabus figuris R & Z ex eiſdem rectis deſcriptis, vnà cum duplo figuræ Y ex media proportionali inter AB & BD. Ergo figura X æqualis eſt figuris R, Z & N cum duplo figuræ Y. Sed *f* figura S æqualis eſt duabus figuris Z & N (propterea quod in triangulo CBD rectus eſt angulus D): Ergo figura X æqualis eſt duabus figuris R & S vna cum duplo figuræ Y ex media proportionali inter latus AB, & productionem eius BD vſque ad perpendicularem CD. Quod erat oſtendendum.

*d prop. 18. hu.*
*e prop. 19. l. 1.*
*f prop. 18. hu.*

EVCL. 12. II.

*Corollarium* Manifeſtum eſt, ſi dictæ figuræ fuerint quadrata eſſe quadratum ex latere ſubtendente angulum obtuſum æquale duobus quadratis ex lateribus dictum obtuſum angulum ambientibus, vnà cum duplo parallelogrammi rectanguli ſub vno latere circa obtuſum angulum, & ſub eius productione vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem.

Nam

Nam *g* parallelogrammum rectangulum ABD æquale eſt quadrato Y ex BE media proportionali inter AB & BD, eſtque quadratum X æquale quadratis R & S duplo quadrati Y (ex hac propoſitione, cum quadrata ſint inter ſe ſimilia): Ergo quadratum X æquale eſt quadratis R & S, & duplo rectanguli parallelogrammi ABD. *g Cor. 2 prop. 14. lib. 4.*

PROPOSITIO XXIX. *Si ſuper tribus lateribus cuiuslibet trianguli, atque ſuper media proportionali inter latus circa angulum acutum, eiuſque ſegmentum vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, deſcripta fuerint qualibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſita; erit figura ex latere acutum angulum ſubtendente æqualis exceſſui duarum figurarum ex lateribus eundem acutum angulum continentibus ſupra duplum figuræ ex illa media proportionali.* Tabula VI. Fig. 17.

In triangulo ABC ſit angulus B acutus; & ſuper *a* latus AB acutum angulum continens cadat ab oppoſito angulo C perpendicularis CD, ſecans *b* latus AB ad partes acuti anguli in D & *c* BE ſit media proportionalis inter BA & BD, & ſuper AC, AB, BC, EB, AD, DB & CD fiant figuræ quælibet X, R, S, M, Z, *a prop. 11. l. 1. b prop. 18. l. 1. c pr. 10. lib. 4.*

Y & N circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram X ex latere ſubtendente angulum acutum B, æqualem eſſe exceſſui duarum figurarum R & S ex lateribus acutũ angulũcontinentibus ſupra duplũ figuræ Y ex media proportionali EB. Quoniam *d* in triangulo ACD rectus eſt angulus D. Ergo figura X æqualis eſt figuris M & N; & figura X cum duplo figuræ Y, erit æqualis figuris M & N cum duplo figuræ Y; ſed figuris R, Z æqualis eſt figura M ex differentia laterum AB, DB, cum duplo figuræ Y ex media proportionali. Ergo figura *e* X unà cum duplo figuræ Y æquatur tribus figuris N, R & Z; eſt verò *f* figura S æqualis figuris N & Z (cum in triangulo CDB angulus D rectus ſit). Igitur figura X vna cum duplo figuræ Y æqualis eſt duabus figuris R & S, & ablato communiter duplo figuræ Y: erit figura X æqualis exceſſui figurarum R & S ſupra duplum figuræ Y. Vt fuit propoſitum.

d pr. 18. huius.

e pr. 20. huius.

f pr. 18. huius.

EVCL. 13. II. *Corollarium* Manifeſtum eſt, ſi dictæ fiuræ fuerint quadrata, eſſe quadratum lateris acutum angulum ſubtendentis æquale exceſſui duorum quadratorum laterum acutum angulum continentium ſupra duplum parallelogrammi rectanguli ſub vno

late-

latere circa angulum acutum, & ſub eius ſegmento ab eodem acuto angulo vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, contenti. Nam *g* parallelogrammum rectangulum ABD æquale eſt quadrato Y ex media proportionali inter *AB* & BD. Ergo ex hac propoſitione quadratum X æqualæ eſt differentiæ duorum quadratorum R & S à duplo parallelogrammi rectanguli ABD. *g Cor. 2 prop. 14. lib. 4*

PROPOSITIO XXX. *Si ſuper circuli diametro, & ſuper lateribus trianguli, quadrati & hexagoni regularium in eodem circulo inſcriptorum, deſcribantur qualibet figuræ circulares vel rectilinea ſimiles & ſimiliter poſita; Erit figura ex diametro ſexquitertia figuræ ex latere trianguli, dupla figura ex latere quadrati, quadrupla figuræ ex latere hexagoni; & figura ex latere trianguli tripla erit figuræ ex latere hexagoni, ſexquialtera figura ex latere quadrati; & hæc dupla erit figura ex latere hexagoni.* EVCL. 12. XIII.

Tab. VI. Fig. 18.

In circulo cuius diameter AE inſcriptæ ſint regulares figuræ triangulum cuius latus AB, quadratum cuius latus AI & hæxagonum cuius latus BE æquale circuli radio DE; & ſuper ea deſcribantur quælibet figuræ circulares vel rectilineæ ſimi-

les & ſimiliter poſita K, M, O & N. Dico primum figuram K ſexquitertiam eſſe figuræ M, duplam figuræ O, & quadruplam figuræ N. Quia ſemicirculi ABE, ACE æquales ſunt, pariterque arcus *a* AB, AC ſubtenſi à leteribus trianguli æquilateri ſunt æquales; ergo reſidui arcus BE & EC ſunt æquales, & quilibet ſexta pars eſt totius periphæriæ circuli; & ideo recta BC *b* bifariam & perpendiculariter ſecatur à diametro AE in H. In ſuper quia BE eſt latus hæxagoni circulo inſcripti cum ſubtendat ſextam circuli partem, & *c* eſt æqualis radijs DB, DE erit DBE triangulum æquilaterum cuius baſis DE à perperpendiculari BH bifariam ſecabitur. Quare diameter AE ad HE erit vt 4 ad 1, & AE ad AH erit vt 4 ad 3. Sed figura *d* K ad figuram ei ſimilem M eſt vt EA ad AH. Ergo figura K ad M eſt vt 4 ad 3; & figura K ad N eſt vt AE ad EH ſeu vt 4 ad 1. Poſtea quia arcus AI quadrans eſt peripheriæ circuli totius erit angulus ADI rectus. Ergo ſicuti diameter *e* EA dupla eſt radij DA ita figura *f* K dupla erit figuræ O ei ſimilis deſcriptæ ſuper media proportionali IA inter illas.

*a prop. 3 huius.* *b pr. 19. lib. 2.* *c pr. 8. huius.* *d prop. 9 17, l. 4.* *e ex pr. 3. huius* *f ex pr. 9. & 17 lib. 4.*

Secundo Dico figuram M eſſe ſexquialteram ipſius O, & triplam figuræ N, quia figura M ad K erat

vt

vt 3 ad 4 & K ad O oſtenſa fuit vt 4 ad 2 nempe dupla ergo *g* figura M ad O erit vt 3 ad 2 & K ad N fuit vt 4 ad 1. Igitur M ad N erit vt 3 ad 1. *g prop. 19. l. 3.*

Tertio Dico figuram O duplam eſſe figuræ N. Quia O ad K fuit vt 2 ad 4 & K ad N vt 4 ad 1. ergo *h* O ad N erit vt 2. ad 1. quoque &c. *h prop. 19. l. 3.*

PROPOSITIO XXXI. *Si ſuper lateribus pentagoni, hexagoni, & decagoni regularium ab eodem circulo comprehenſorum fiant quælibet figuræ circulares, aut rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere pentagoni æqualis duabus figuris ſimul ſumptis ex latere hexagoni, & ex latere decagoni deſcriptis*: Tabula VI. Fig. 19. EVCL. 10. XIII

In circulo ACB ſit AB latus inſcripti pentagoni, EA latus inſcripti decagoni regularium, & radius DB erit latus inſcripti hexagoni, & ſuper his lateribus *a* deſcriptæ ſint quælibet circulares, vel rectilineæ figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, M quidem ſuper AB, R ſuper DB, & S ſuper EA. Dico figuram M æqualem eſſe duabus figuris R, & S ſimul ſumptis. *a ex pr. 3. huius*

Secetur *b* arcus AE ſubtenſus à latere decagoni bifariam in H, ſicuti *c* arcus AB in E ſectus fuerat bifariam; eritque arcus AH quar- *b ex pr. 19. l. 2.* *c ex pr. 3. huius*

ta pars arcus AB, & tertia pars arcus BH, & iungatur radius DH ſecans *d* bifariam, & perpendiculariter latus decagoni in O & AB in K: iunganturque EK, BE & diameter AC. Quoniam in triangulis AOK & EOK circa angulos rectos æquales ad O ſunt duo latera AO & EO æqualia & OK commune. Ergo *e* angulus KEO æqualis eſt angulo KAO & *f* æquales quoque ſunt anguli EBA & EAB, cum inſiſtant peripherijs æqualibus EA, BE, ergo anguli AEK, ABE æquales ſunt, eſtque angulus BAE communis in triangulis BEA, EKA: Ergo *g* inter ſe ſunt ſimilia. Quare BA, ad AE erit, vt EA ad AK, ideoque *h* figura M ad ei ſimilem, & ſimiliter poſitam figuram S erit vt BA ad AK. Rurſus quia, vt arcus EA *i* decima pars eſt totius peripheriæ ABCA, ita arcus *l* AH ſemiſſis illius decima pars eſt ſemiperipheriæ ABC; & eſt arcus BH triplus arcus AH. Ergo qualium partium arcus ABC eſt decem erit BH tres, & BC ſex partes; ideoque arcus BC duplus erit ipſius arcus BH; & *m* angulus CDB duplus erit anguli BDH; ſed *n* angulus CDB ad centrum duplus eſt anguli BAC ad peripheriam: Ergo anguli BDH & DAB æquales inter ſe ſunt; & angulus B eſt communis. Ergo *o* duo triangu-

*d* prop. 29. lib. 2

*e* prop. 4. lib. 1.

*f* prop. 17. lib. 2

*g* ex pr. 4. l. 4.

*h* ex pr. 17. lib. 4

*i* ex pr. 3. huius

*l* prop. 10. lib. 3

*m* ex pr 17. l. 2.

*n* Prop. 13. l. 2.

*o* pr. ...

la ABD & DBK ſimilia ſunt; pro-
ptereaque AB ad BD erit, vt DB
ad BK. Vnde *p* figura M ad ei ſimi-
lem, & ſimiliter poſitam figuram R p ex pr 17. l. 4
erit, vt AB ad BK; erat autem figu-
ra eadem M ad figuram S, vt ea-
dem recta AB ad AK. Ergo *q* figu-
ra M ad ambas figuras R & S ſimul q ex pr 22. l. 3.
ſumptas erit, vt recta BA ad rectas
BK & AK ſimul ſumptas; eſtque BA
æqualis duabus BK, KA. Ergo *r* fi-
gura M ex latere pentagoni æqualis r ex pr. 16. l. 3.
eſt duabus figuris R ex latere hexa-
goni, & S ex latere decagoni ſimul
ſumptis. Quod erat oſtendendum.

*Finis Libri quinti.*

# LIBER VI.

## *De Solidis,*

## DEFINITIONES.

I. *Solidum ſiue corpus, eſt, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet, cuius extrema ſunt ſuperficies.*

II. *Solidus angulus eſt concurſus plurium, quàm duorum angulorum planorum, non in eodem plano conſiſtentium ad vnum punctum.* Tab. VI. Fig. 20.

Vt ſi fuerint plures, quàm duæ rectæ AD, BD, CD, concurrentes in D, & non in eodem plano iacentes, anguli plani ADB, BDC & CDA, non in eodem plano exiſtentes, & concurrentes in D, efficiunt angulum ſolidum D. Et ſiquidem anguli plani conſtituentes ſolidum angulum D fuerint tres vocabitur talis ſolidus angulus triangularis, ſi quatuor quadrangularis, & ſic vlterius.

III. *Solida rectilinea, quæ æquiangula inter ſe ſunt, & omnia latera circa angulos ſolidos æquales proportionalia habent; vocentur* Similia.

IV. *Solida figura genita ex reuolutione ſemicirculi circa diametrum eius quieſcentem, quouſque redeat ad locum, à quo moueri cœperat; vocetur* Sphera. *Et diameter quieſcens, vocetur*

Axis

Axis ſphæræ. *Et centrum ſphæræ erit idem, quod ſemicirculi*. Diameter *ſphæræ eſt qualibet recta per centrum ſphæræ extenſa*. *Circulus* maximus *ſphæra eſt ille, qui per centrum ſphæra tranſit: reliqui vero minores.* Hemiſphærium *autem vocetur dimidium ſphæræ diſſecta à circulo maximo*.

## POSTVLATA.

*Per quamlibet rectam lineam planum, ſeu ſuperficiem planam ducere.* I.

*Et quodlibet planum indefinitè producere.* II.

## AXIOMATA.

*Duo plana non habent ſegmentum commune.* I.

*Duo plana ſolidam figuram non comprehendunt.* II.

*Duorum planorum communis ſectio linea eſt. Et eadem linea iacens tota in in duabus ſuperficiebus diſtinctis, erit earum communis ſectio, vel contactus.* III.

*Eiuſdem recta linea, cuius duo puncta, aut pars eius iacent in ſubiecto plano, pars reliqua in ſublimi eſſe non poteſt.* IV. EVCL. p. 1. XI.

Exigit enim a natura planæ ſuperficiei, vt illi omnino, & vndequaque congruat recta linea, quod tunc verificatur, quando omnia b Def. 5, li. 1.

puncta lineæ rectæ contingunt planam ſuperficiem.

V. EVCL. pr. 2. XI *Duæ rectæ ſe ſecantes in vno ſunt plano* Tabula VI. Fig. 21.

Sint enim duæ rectæ lineæ AB & CD ſe ſecantes in E, patet ipſarum vnam, vt AB in vno plano AH intelligi poſſe collocatam, & ſi concipiatur planum AH circa rectam AB circunduci, neceſſariò in aliquo loco reuolutionis ipſius incidet in rectam CD ſaltem in aliquo puncto eius D præter punctum E; & tunc planum ipſum AH, quod per duo puncta D & E tranſit neceſſario per rectas DE & AB tranſibit, quandoquidem recta linea ED non poteſt planum ipſum contingere in duobus punctis D & E, & extra ipſum exiſtere.

EVCL. 3. XI. PROPOSITIO I. *Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio recta linea eſt.* Tabula VI. Figura 22.

Duo plana ABCD & EFG ſe ſecent *a* in linea NO. Dico lineam NO rectam eſſe. Sumantur duo quælibet puncta N & O, quæ in linea communis ſectionis exiſtant, ideſt iaceant in vtroque plano, & à puncto N ad O coniungatur recta linea. Quia *b* recta NO plano AC congruit, in quo puncta N & O exiſtunt

*a ax. 3. huius.*

*b Def. 5 lib. 1.*

ſtunt, alias *c* non vndequaque plano AC congrueret recta linea. Pariter recta NO plano FG congruit, in quo pariter puncta N & O exiſtunt. Ergo recta NO in vtroque plano AC & FG iacet, eſtque communis ſectio eorundem planorum linea vnica (alias *d* plana ſe ſecantia haberent ſegmentum commune, aut *e* ſolidam figuram comprehenderent) ergo recta NO eſt communis ſectio eorundem planorum. Quare, &c. *c ax. 4. huius.* *d ax. 1. huius.* *e ax. 2. huius.*

PROPOSITIO II. *Si recta linea incidens in communem ſectionem duarum rectarum linearum perpendicularis fuerit ad vtranque, illa perpendicularis erit ad omnes rectas lineas a quibus illa tangitur, quæque in plano per duas illas rectas lineas ducto, exiſtunt: Vocetur talis recta ſublimis,* Erecta *ſeu Perpendicularis ad planum ſubiectum.* Tabula VI. Figura 23. EVCL. 4. XI.

Duæ rectæ lineæ CD, FE in plano MN exiſtentes ſe ſecent in puncto B, & ſublimis recta AB efficiat tam angulum ABC, quàm angulum ABF rectum; & ducatur à puncto B in plano NM quælibet recta BK, cadens intra quemlibet angulorum CBF. Dico rectam AB eſſe quoque perpendicularem ad rectam BK, ſecentur *a* GB & HB æquales *a prop. 3. lib. 1.*

inter ſe, iungaturque HG, ſecans BK in K, atque *b* HG ſecetur bifariam in O, coniunganturque rectæ OB, AG, AO, AK, AH. Quia in triangulis BOG, BOH latera GO, OH ſunt æqualia, OB commune & baſes GB, HB æquales ergo *c* anguli ad O ſunt æquales & ideo BO perpendicularis erit ad GH. Poſtea in triangulis AGB, AHB latera GB, HB ſunt æqualia & AB latus commune circa rectos angulos ABG & ABH. Ergo *d* baſes AG, AH æquales ſunt, & ideo vt prius *e* in triangulis, AOG, AOH latus commune AO perpendicularis erit ad GH bifariam ſectam in O. Poſteà quia in triangulo ABH rectangulo in B *f* quadrato AH æqualia ſunt duo quadrata AB & BH; ſuntque *g* quadrato BH æqualia duo quadrata BK, KH vna cum duplo rectanguli HKO. Ergo quadrato AH æqualia ſunt tria quadrata ipſarum HK, KB & BA, cum duplo rectanguli HKO. Similiter in triangulo AKH eidem *h* quadrato AH æqualia ſunt duo quadrata HK, KA cum duplo rectanguli HKO igitur tria quadrata HK, KB & BA cum duplo rectanguli HKO æqualia ſunt duobus quadratis HK & KA cum duplo rectanguli HKO, & ablatis communiter quadrato HK & duplo rectanguli HKO remanebunt duo

*b* prop. 9. l. 1.

*c* prop. 7 lib. 1.

*d* prop. 4. lib. 1.

*e* prop. 7. lib. 1.

*f* prop. 18. l. 5.

*g* pr. 28 29. l. 5.

*h* eadē

qua-

quadrata KB & BA æqualia quadrato KA; & propterea *i* angulus ABK rectus erit igitur AB perpendicularis eſt ad quamlibet BK occurrentem termino rectæ AB in plano MN. Quod erat &c. vocetur recta AB perpendicularis ad planum MN, quod per rectas CD, FE ducitur. *i ex pr. 29. l. 5.*

PROPOSITIO III. *Si recta linea incidens in communem ſectionem trium rectarum ad ſingulas perpendicularis fuerit: illa tres recta lineæ in vno ſunt plano.* Tabula VI. Figura 24. EVCL. 5. XI.

Recta linea AB incidat in B, & efficiat cum tribus BC, BD, BE, ſe tangentibus in B, rectos angulos. Dico tres rectas BC, BD, BE in vno plano eſſe. Si enim BE non iacet in plano CH, quod per rectas CB & BD duci poteſt, producatur *a* planum HC quouſque ſecet *b* planum per rectas AB, BE extenſum in recta BG. Quoniam AB ponitur perpendicularis ad duas BC, BD; *c* Ergo AB perpendicularis eſt ad rectam BG poſitam in eodem plano per rectas BC, BD extenſo; ſed erat quoque AB perpendicularis ad BE, & iacet BE in plano ABG. Ergo duo anguli recti ABE & ABG æquales ſunt inter ſe, pars & totum; quod eſt impoſſibile. *a poſt. 2 huius. b prop. 1. huius c prop. 2 huius.*

Non

Non ergo recta BE extra planum CH iacet; ideoque rectæ BC, BD, BE in vno ſunt plano. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 8. & 18 XI. PROPOSITIO IV. *Si in quolibet plano per rectam lineam ad ſubiectum planum perpendicularem extenſo, recta eidem perpendiculari parallela ducta fuerit: erit illa perpendicularis quoque ad planum ſubiectum. Vocetur autem ſublime planum Erectum, ſeu Perpendiculare ad planum ſubiectum.* Tabla VI. Fig. 25.

Sit recta CD perpendicularis ad planum EG, & per CD ductum ſit quodlibet planum CDB, & in eo ducta ſit AB parallela ipſi CD. Dico rectam AB ad idem planum EG perpendicularem eſſe. Iungatur recta BD, & in plano EG ducatur recta *a* HB perpendicularis ad rectam BD, & coniungantur rectæ HD, HC & BC. Quoniam recta CD perpendicularis eſt ad planum EG; Ergo *b* CD efficiet rectos angulos cum rectis lineis DB & HD in eodem plano extenſis ad terminum D; ideoque *c* in triangulo CHD rectangulo in D erit quadratum CH æquale duobus quadratis CD & DH; *d* ſed quadrato DH æqualia ſunt duo quadrata HB & BD (propterea quod angulus HBD rectus factus eſt). Igitur quadratum

a prop. 10. l. 1.

b prop. 2 huius.

c prop. 18. l. 5

d prop. 28. l. 5.

HC

HC æquale eſt tribus quadratis H B, BD & DC; eſt verò quadratum BC æquale duobus quadratis BD & DC (eo quod angulus CDB rectus eſt); Ergo quadratum HC æquale eſt duobus quadratis HB & B C; & propterea *e* in triangulo CB H angulus HBC rectus erit, ſed factus fuit angulus HBD rectus: Igitur recta HB perpendicularis eſt ad duas BD & BC; & *f* rectæ BC & BD iacent in eodem plano parallelarum AB & CD, in quo puncta B, C & D exiſtunt: Ergo *g* recta H B perpendicularis quoque eſt ad rectam BA, quæ in eodem plano CB D exiſtit. Eſt *h* etiam angulus AB D rectus, cùm reliquus internus C DB, & ad eaſdem partes parallelarum ſit quoque rectus: Ergo recta AB perpendicularis eſt ad duas rectas BD & BH concurrentes in B; Et propterea *i* AB perpendicularis erit ad planum EG, quod per rectas BD & BH ducitur. Quod erat oſtendendũ. Vocetur quodlibet planum CDB ductum per rectam CD perpendiculare ad ſubiectum planum, *Erectum*, ſeu Perpendiculare ad idem planum EG.

*e ex pr. 29. l. 5.* *f exiom 4. huius* *g prop. 2. huius* *h prop. 15. l. 2.* *i prop. 2 huius.*

*Corollarium* Recta linea duo puncta coniungens in duabus parallelis ſumpta in eodem plano parallelarum iacet. Sumpta enim fuerunt

EVCL. 7. XI.

pun-

puncta B, C in parallelis AB, CD, & oſtenſa fuit recta BC in plano parallelarum AB, CD iacere.

EVCL. 6. XI. PROPOSITIO V. *Si duæ rectæ ad idem planum perpendiculares fuerint, parallelæ erunt inter ſe.* Tabula VI. Figura 26.

Sint duæ rectæ BA & DC perpendiculares ad planum EG. Dico rectas BA & DC parallelas eſſe inter ſe. Si enim BA non eſt parallela DC, in a plano DCA, à puncto A ducatur AH parallela ipſi CD, & b per rectas AH & AB extendatur planum ſecans ſubiectum c planum EG in recta NAK. Et quia DC perpendicularis eſt ad planum EG: Ergo d ei parallela HA perpendicularis quoque erit ad planum EG: igitur e angulus HAK rectus erit; ſed BA perpendicularis quoque eſt ad planum EG. Ergo angulus BAK rectus quoque eſt; & ſunt anguli BAK & HAK in eodem plano BAK: igitur totus angulus BAK æqualis eſt angulo HAK ſuæ parti, quod eſt abſurdum. Non ergo alia recta, quàm BA eſſe poteſt, parallela ipſi DC. Quare patet propoſitum.

a cor pr. 16. l. 11. b poſt. 1 huius. c prop. 1. huius. d prop. 4. huius e prop. 2 huius.

EVCL. Def. 4. & prop. 38. & 13. XI. *Corollarium* Conſtat ex his duabus propoſitionibus, quòd non poſſunt ambæ rectæ BA, HA ſe mutuo ſecantes perpendiculariter inſiſtere

ſuper

ſuper idem planum EG. Et in quolibet plano BAC ad ſubiectum planum EG erecto omnes rectæ lineæ, BA, DC quæ in eo exiſtentes perpendiculariter ad AC communem ſectionem planorum ſectionem ducuntur, ſunt quoque perpendiculares ad ſubiectum planum. Et illa, quæ à puncto ſublimi B eiuſdem plani erecti ducitur perpendiculariter ad ſubiectum planum cadet in communem planorum ſectionem.

PROPOSITIO VI. *A dato puncto in ſublimi, aut in ſubiecto plano poſito, ducere rectam lineam perpendicularem ad ſubiectum planum.* Tabula VI. Fig. 27. 28. EVCL. 11. 12. XI.

Sit quodlibet planum EG: Debet à puncto A in dicto plano, aut in ſublimi poſito duci recta linea, quæ perpendicularis ſit ad ſubiectum planum EG. Per punctum A *a* ducatur quodlibet planum ABDC, ſecans *b* ſubiectum planum EG in recta BC, atque *c* in plano ABCD à puncto A ducatur AF perpendicularis ad rectam BC, & *d* in plano EG à puncto interſectionis rectarum BC, AF ducatur HK perpendicularis ad eandem BC; tandem in plano per rectas FA & HK extenſo ducatur *f* à puncto A recta AO perpendicularis ad rectam HK. Dico AO perpendicularem eſſe ad planum

*a poſt. 1. & pr. 1. huius.*
*b prop. 1. huius*
*c prop. 10. & 11. l. 11*
*d prop. 10. l. 1*
*e poſt. 2 huius.*
*f prop. 10. & 11 lib. 1*

num EG. Quoniam recta BC perpendicularis eſt ad duas rectas FA & HK ſe ſecantes primò in A, ſecundò in F: Ergo *g* recta BC perpendicularis eſt ad planum per rectas FA & HK ductum; atque *h* planum EG extenſum per eandem perpendicularem BC erit quoque erectum ad idem planum: ergo viciſſim planum per rectas FA, HK ductum perpendiculare erit ad planum EG; & recta AO exiſtens in plano per FA, HK extenſo ducitur perpendiculariter ad HK eorum communem ſectionem. Ergo *i* recta AO perpendicularis eſt ad planum EG; quod faciendum erat.

*g prop. 3. huius* *h prop. 4. huius* *i coroll. prop. 5. huius.*

PROPOSITIO VII. *Si duæ rectæ lineæ vni tertiæ parallelæ fuerint, non in eodem plano exiſtentes, inter ſe quoque parallelæ erunt.* Tab. VI. Figura 29.

*EVCL. 9. XI.*

Sint rectæ AB & CD parallelæ eidem rectæ EF, & non ſint omnes in vno plano. Dico rectas AB & CD inter ſe parallelas eſſe. A quolibet *a* puncto G rectæ EF ducantur in planis æquidiſtantium rectæ lineæ GH & GK perpendiculares ad eandem EF, quæ ſecent oppoſitas parallelas in H & K, & coniungatur recta HK. Quoniam eadem recta linea EG perpendicularis eſt ad duas rectas GH, GK; ergo *b* EG perpen-

*a propr. 10. l. 4.* *b prop. ... huius*

pendicularis eſt ad planum GHK; eſt vero AH parallela ipſi EG. Igitur *c* AH perpendicularis quoque eſt ad planum HGK. Eadem ratione CD æquidiſtans eidem EG perpendicularis quoque erit ad planum HGK; cumque duæ rectæ AH, & CK ſint perpendiculares ad planum HGK *d* erunt AH & CK inter ſe parallelæ. Quod erat oſtend. c prop. 4. huius d prop. 5. huius

PROPOSITIO VIII. *Si duo plana ſe mutuò ſecantia per duas parallelas ducta fuerint, efficient communem ſectionem vtrique ipſarum æquidiſtantem. Et ſi ambo plana perpendicularia fuerint ad ſubiectum planum; & communis eorum ſectio ad planum ſubiectum perpendicularis erit.* Tabula VI. Fig. 30. EVCL. 19. XI.

Primò per duas rectas æquidiſtantes DC & FH ducta ſint duo plana AC, BF ſe ſecantia in recta linea AB. Dico AB parallelam eſſe vtrique ipſarum DC & FH: Si enim hoc verum non eſt, in duobus planis AC, AH à *a* puncto communi A ſectionis AB ducantur AO, quidem parallela ipſi DC & AK parallela ipſi FH. Et quoniam AO, FH parallelæ ſunt eidem DC *b* erunt inter ſe parallelæ quoque; & fuit AK eidem FH parallela. Ergo *c* AO & AK parallelæ ſunt inter ſe, & ſe ſecant in A, *d* quod eſt impoſſibile. Non ergo alia recta linea præter AB com- a cor. pr 16. l. 1. b prop. 7. huius c prop. 17. l. 1. d ex pr. 14. l. 1.

*B* communis planorum ſectionis, eſſe poteſt parallela vtrique æquidiſtantium DC, FH.

e prop. 10. v. l. 11. l. 1.

f cor. pr 5. huius

g prop. 5. huius

h ex prima par. huius.

i Prop. 4. huius

Secundò plana AC, AH perpendicularia ad ſubiectum planum EG, idque ſecantia in BC, BH ſe mutuo ſecent in recta AB. Dico AB perpendicularem eſſe ad planum EG. A quibnſlibet *e* punctis C & H in planis erectis ducantur perpendiculares CD, HF ad communes ſectiones BC, BH: erunt *f* tam DC, quam HF perdendiculares ad planum ſubiectum EG; & propterea *g* DC & HF parallelæ erunt inter ſe; ideoque *h* per eas ducta plana AC, BF efficient communem ſectionem AB parallelam cuilibet ipſarum CD; ſed erat DC perpendicularis ad planum ſubiectum; ergo AB planorum *i* communis ſectio perpendicularis quoque erit ad ſubiectum planum EG, vt fuerat propoſitum.

EVCL. 14. XI.

PROPOSITIO IX. *Si ad duo plana eadem recta linea perpendicularis fuerit, omnes rectæ lineæ inter ſe parallela ſecta ab illis duobus planis, erunt æquales inter ſe. Vocentur illa duo plana parallela inter ſe.* Tabula VI. Fig. 31.

Sint duo plana AB & DC, & vna tantum linea MO perpendicularis ſit ad vtrumque planum, & duæ quælibet rectæ lineæ EF, GH paralle-

rallelæ inter ſe ſecentur vtrinque ab eiſdem planis in punctis E, F, G H. Dico rectas EF & GH æquales eſſe inter ſe. A punctis E & G *a* ducantur rectæ EK, GN perpendiculares ad reliquum planum CD, & coniungantur rectæ KF, NH, KN, FH & EG. Quoniam rectæ MO & EK perpendiculares ſunt ad planum CD: Ergo rectæ MO, EK parallelæ ſunt inter ſe, & earum vna OM perpendicularis eſt ad planum AB: Ergo reliqua *c* KE perpendicularis quoque erit ad idem planum AB. Eadem ratione recta GN, quæ perpendicularis ponitur ad planum CD erit quoque ad reliquum planum AB perpendicularis. *d* Quare duæ rectæ EK & GN perpendiculares quoque erunt ad rectas contiguas EG & KN in eiſdem planis exiſtentes. Et propterea *e* ſpatium rectangulum EGNK parallelogrammum erit, cuius oppoſita latera EK, GN æqualia, & parallela erunt; nec non duo latera EG, KN parallela erunt, & æqualia. Iam cùm per duas parallelas EG & KN ducantur duo plana EH & NF ſe ſecantia in recta FH: erit *f* FH parallela ipſi EG; ſed poſitæ fuerant duæ EF & GH parallelæ inter ſe: Ergo *g* ſpatium EGHF parallelogrammum eſt, cuius oppoſita latera EF & GH æqualia erunt. Eadem

ratio-

*a prop. 6. huius*

*b pr. 5. huius.*

*c pr. 4. huius.*

*d pr. 2. huius.*

*e pr. 29 lib. 1.*

*f pr. 8. huius.*

*g prop. 26. l. 1.*

ratione reliquæ omnes rectæ paral-
lelæ ipſis EF, vel GH ſectæ à pla-
nis AB & CD oſtendentur æquales
inter ſe, & æquales ipſis EF, GH.
Quod erat oſtendendum. Vocen-
tur iam duo plana AB, CD paral-
lela inter ſe, & quælibet recta MC
perpendicularis ad vtrumque pla-
num vocetur Diſtantia eorum.

EVCL. 16. XI. *Corollarium* Patet, ſi recta linea
GN ad vnum æquidiſtantium pla-
norum CD perpendicularis fuerit,
eſſe quoque perpendicularem ad re-
liquum AB. Et ſi duo plana paral-
lela AB, CD ſecentur ab alio pla-
no GF, eſſe communes eorum ſe-
ctiones EG, FH parallelas.

EVCL. 10. & 15 XI. PROPOSITIO X. *Si duæ rectæ li-
neæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas
ſe tangentes fuerint parallelæ, illæ
angulos ad eaſdem partes vergentes
æquales comprehendent. Et plana,
quæ per illas ducuntur: parallela
erunt.* Tab. VI. Fig. 32.

Sint duæ rectæ AB, AC ſe tan-
gentes in A parallelæ duabus rectis
DE, DF in alio plano exiſtentibus,
& ſe tangẽtibus in D. Dico 1. ad eaſ-
dem partes angulos poſitos BAC &
EDF æquales eſſe. Ducatur *a* à pun-
cto A ad planum EDF perpendi-
cularis AH incidens in punctum
H, à quo in plano EDF ducantu

a prop. 6 huius.

*b* re-

b rectæ HK parallela ipſi DE & H N parallela reliquæ DF. Patet c angulum KHN æqualem eſſe angulo EDF; Secentur d poſtea HK æquales AB & HN æqualis AC, & coniungantur rectæ BC, KN, BK, CN. Et quoniam duæ rectæ AC, HN parallelæ ſunt eidem DF: Ergo e AC & HN inter ſe parallelæ ſunt, & erant æquales: Igitur f parallelogrammum eſt ACNH; & ideò CN æqualis eſt, & parallela ipſi AH. Eodem modo AB, HK æquales inter ſe ſunt, & g æquidiſtant, cum ſint parallelæ eidem DE ergo vt prius BK æqualis eſt, & parallela eidem AH; & propterea CN & BK æquales inter ſe, & h parallelæ erunt. i Vnde parallelogrammum erit BCNK, & eius latera oppoſita BC, KN parallela, & æqualia inter ſe erunt. Quare in triangulis ABC, HKN nedum AB, HK æquales ſunt, atque AC, HN æquales, ſed etiam baſes BC, KN ſunt æquales; l ideoque angulus BAC æqualis erit angulo KHN; ſed prius erat angulus EDF æqualis eidem angulo KHN. Igitur anguli BAC & EDF æquales inter ſe ſunt. Secundò dico plana BAC & EDF, quæ per eaſdem rectas ducuntur eſſe parallela inter ſe. Nam recta AH ducta eſt perpendiculariter ad planum EDF; & ideo m efficit in-

b cor pr. 16. l. 1.
c ex pr. 7. l. 4.
d prop. 3. l. 1.
e prop. 7. huius
f prop. 27. l. 1
g prop. 7. huius
h prop. 7. huius
i prop. 27. l. 1
l prop. 7 lib. 1.
m prop. 2. huius

eo angulos AHN & AHK rectos, & ſpatia AN & AK, quæ oſtenſa ſunt parallelogramma, erunt *n* rectangula. Quare anguli HAC, HAB recti erunt; ideoque *o* eadem recta AH perpendicularis etiam erit ad planum ABC; & propterea *p* plana ABC, DEF parallela erunt. Vt erat propoſitum.

*n ex pr. 34. l. 1*
*o prop. 2. huius*
*p prop. 9. huius*

EVCL. 17. XI

PROPOSITIO XI *Si duæ rectæ lineæ planis parallelis ſecentur, in eaſdem rationes ſecabuntur.* Tab. VI. Fig. 33.

Duæ rectæ AB & CD, ſiue in eodem, vel diuerſis planis quomodocunque poſitæ, ſecentur à planis inter ſe parallelis EF, GH, KM in punctis A, O, B, C, N, D. Dico eas ſecari proportionaliter, ideſt eſſe AO ad OB vt CN ad ND. Coniungantur rectæ AC, BD & AD, quæ occurrat plano GH in puncto R, & à puncto R ad O & N rectæ OR, RN iungantur. Quoniam planum trianguli ACD ſecatur à duobus planis parallelis EF, GH. Ergo *a* eorum communes ſectiones AC, RN parallelæ erunt, ideoque *b* vt AR ad RD, ita erit CN ad ND. Similiter quia planum trianguli DAB ſecatur à duobus planis GH, KM inter ſe parallelis; Ergo *c* eorum communes ſectiones DB, OR inter ſe parallelæ erunt, ideo-

*a cor. pr 9. huius*
*b prop. 2. lib. 4*
*c cor. pr. 9. huius*

deoque d vt AR ad RD, ita erit A O, ad OB; oſtenſa autem fuit CN ad ND in eadem ratione eiuſdem A R ad eandem RD. Ergo e AO ad OB erit, vt CN ad ND. Quod erat oſtendendum. d prop. 2. l. 4. e prop. 7. l. 3.

PROPOSITIO XII. *Solidi anguli triãgularis duo quslibet eius plani anguli tertio ſunt maiores.* T. vi. F. 34. EVCL. 20. XI.

Sit triangularis ſolidus angulus A conſtans ex tribus angulis planis BAD, DAC & CAB. Dico duos quoſlibet angulos BAD & DAC, ſimul ſumptos, maiores eſſe tertio angulo BAC. Eligatur angulus BAC qui non minor ſit angulo BAD, & in plano per BAC ducto fiat a angulus BAE æqualis angulo BAD, & ſiquidem AE coincidit cũ AC, patet duos angulos BAD, DAC maiores eſſe angulo BAC. Quando vero AE cadit inter rectas BA, AC, in rectis AB, AC ſumantur duo quælibet puncta B & C, & iungatur recta BC, ſecans interceptam AE in E: Et b ſecetur AD æqualis AE, iunganturque rectæ lineæ BD, DC & DE. Quoniam circa æquales angulos BAD, BAE ſunt latera AD, AE æqualia, & AB commune. Ergo c triangulorum baſes BD, BE æquales ſunt. Quare CE erit differentia duorum laterum BD, BC; & propterea d in triangulo BDC a prop. 24. l. 1. b prop. 3. l. 1. c prop. 4. l. 1. d prop. 21. l. 1.

C laterum differentia CE minor erit baſe CD; cumque in triangulis DAC, EAC duo latera AD, AE ſint æqualia, & AC commune, & baſis DC maior baſe CE: ergo e angulus DAC maior erit angulo EAC; ſed erant anguli BAD, BAE æquales. Igitur *f* ſumma vnius æqualium angulorum BAD, & maioris inæqualium DAC maior erit angulo BAC, qui eſt ſumma vnius æqualium BAE, & minoris inæqualium EAC. Quare patet propoſitum.

e cor. pr. 6. l. 2.

f axio. 4 lib. 2.

PROPOSITIO XIII. *Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur*. Tabula VI. Fig. 3.

EVCL. 21. XI.

Sit angulus ſolidus A contentus quotcunque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB. Dico eos omnes ſimul ſumptos minores eſſe quatuor planis angulis rectis. *a* Ducatur planum, ſecans omnes rectas angulum A continentes, vt efficiatur *b* figura rectilinea BCDEF tot laterum, quot ſunt plani anguli ſolidum angulum A continentes, & ſumpto intra polygonum BCE quolibet puncto G, ab eo ad angulos omnes polygoni ducantur rectæ GB, GC, GD, GE & GF. Et quoniam polygoni latera BC, CD, DE, EF, FB ſunt baſes, nedum triangulorum verticem habentium in G; ſed etiam triangu-

a poſt. 1 & 2. hu.

b prop. 1. huius

lo-

lorum verticem in A habentium. Ergo tot ſunt triangula verticem habentia in G, quot ſunt ea, quæ verticem in A habent; ſed c cuiuſlibet trianguli tres anguli ſunt æquales duobus rectis. Ergo æquali numero rectorum æquales erunt anguli omnes triangulorum verticem in G habentium; atque anguli omnes triangulorum verticem in A habentium. Et propterea anguli omnes triangulorum verticem in G habentium, ſimul ſumpti, æquales erunt angulis omnibus, ſimul ſumptis triangulorum verticem haben- tium in A. Poſtea d in angulo ſolido triangulari B duo plani anguli FBA, CBA maiores erunt angulo CBF; ideſt maiores erunt duobus angulis FBG, CBG, & ſic reliqui omnes. Quare omnes anguli, qui ſunt ad baſes triangulorum verticem in A habentium, ſimul ſumpti, maiores erunt omnibus angulis, qui ſunt ad baſes triangulorum verticem in G habentium; ideoque reſidui anguli omnes verticales, qui ſolidum angulum A efficiunt, minores erunt reſiduis omnibus angulis, qui in G verticem habent; ſed e anguli omnes, qui in G verticem habent, quatuor angulis rectis ſunt æquales. Igitur anguli plani omnes, qui ſolidum A componunt, ſimul ſumpti, quatuor rectis minores erunt.

c prop. 18. l. 1

d prop. 12. huius

e ex pr. 13. l. 1.

EVCL. 23. 26. XI.

PROPOSITIO XIV. *Ex tribus angulis planis, quorum duo quilibet tertio ſint maiores, & tres ſimul quatuor rectis minores ſint, ſolidum angulum conſtituere.* Tab. VI. Figura 36. 37.

Sint tres anguli *A, B, C*, qui ſimul ſumpti ſint minores quatuor rectis; ſed duo quilibet ex eis tertio ſint maiores. Debet effici angulus ſolidus, cuius tres anguli ſint ipſis A, B, C æquales. In quolibet circulo DGH, cuius radius FD, fiant *a* ad centrum anguli DFE æqualis angulo A & EFG æqualis angulo B, atque GFH æqualis angulo C: erunt *b* tres arcus DE, EG, GH minores integra circuli peripheria, & duo ex eis maiores tertia, ſicuti anguli A, B, C, ſeu ijs æquales anguli ad centrum F, qui proportionales ſunt peripherijs ſubtenſis, minores ſunt quatuor rectis; & duo quilibet maiores ſunt tertio. Et *c* à punctis D & H ad radios EF, GF ducantur perpendiculares DR, HM. Patet *d* rectas DR, HM efficere arcum DER duplum arcus DE, & arcum HGM duplum arcus HG: Quare *e* rectæ DR, HM antequam ad puncta R & M pertingant ſe ſecabunt intra circulum, vt in O; & propterea *f* rectangula parallelogramma DOR & HOM æqualia erunt. *g* Eleuetur iam à puncto

*a prop. 24. l. 1*
*b ex pr. 21. l. 5*
*c prop. 10. l. 1.*
*d prop. 19. l. 1*
*e ex pr. 23. l. 1.*
*f prop. 22. l. 4*
*g prop. 6. huius*

cto. O recta OS perpendicularis ad
planum DRH, cuius *h* quadratum — h prop. 21. l. 4
ſit æquale rectangulo DOR, vel H
OM, erit OS nedum *i* perpendicu- — i prop.
laris ad rectas DR, HM in ſubiecto — 2. huius
plano exiſtentes; ſed etiam *l* erit me- — l cor. 2.
dia proportionalis tam inter DO, — prop. 14
OR, quàm inter HO, OM; & pro- — lib. 4.
pterea *m* tria puncta D, S, R in ſe- — m ex pr
micirculi peripheria exiſtent erecti — 9. l. 4.
*n* ad planum DGH, cùm per SO — n prop.
erectam ad idem planum ducatur: — 4. huius
non ſecus tria puncta H, S, M,
in peripheria ſemicirculi erecti ad
idem planum exiſtent. Coniungan-
tur tandem rectæ NS, KS. Et quo-
niam planum DRH oſtenſum eſt
perpendiculare ad planum ſemicir-
culi DSR; eſtque EFN in vno eo-
rum poſita perpendicularis ad DR
communem planorum ſectionem:
Ergo *o* EF perpendicularis eſt ad — o ex pr.
planum DSR; & propterea *p* EF — 5. huius
perpendicularis eſt ad rectam NS in — p prop.
eo poſitam. Quare in duobus trian- — 2. huius
gulis FNS, FND circa duos angu-
los rectos SNR, DNF ſunt duo la-
tera DN, NS æqualia, cum ſint ra-
dij circuli DSR & FN commune:
Ergo *q* anguli SFN, DFN æquales — q prop.
ſunt; eſtque angulus A æqualis an- — 4. l. 1.
gulo DFN, vel DFE in primo ca-
ſu, vel angulo DFE complemento
ipſius DFN in ſecundo caſu. Ergo
angulus SFE æqualis erit angulo A.

Eodem modo oſtendetur angul[us] SFK æqualis angulo HFK, ſeu angulus SFG æqualis angulo HFG, vel angulo C. At ſi duo anguli & C, ſiue eis æquales DFE, HF[G] ſint recti à puncto F eleuetur rect[a] linea FS perpendicularis ad plan[um] anguli EFG. Manifeſtum eſt ſ[u]ctam SF perpendicularem eſſe [ad] ambas rectas FE & FG, & propt[e]rea angulus SFE æqualis erit angulo recto A, & angulus SFG æqualis erit recto angulo C: factus autem fuit angulus EFG æqualis angulo B. Igitur tres anguli plani [E]FS, SFG, GFE componentes angulum ſolidum F æquales ſunt dat[is] angulis A, B, C. Quod faciend[um] erat.

*a prop. 6 huius.*

*f prop. 2 huius.*

## DEFINITIONES SECVND[Æ]

I. *SI à perimetro figuræ planæ ad ſublim[e] punctum recta linea eleuata conuertatur circa figuræ perimetrum, ſummanente puncto ſublimi, quouſque redeat ad locum, à quo cœperat moueri: vocabitur ſolidum genitum, ſi figura ſubiecta rectilinea fuerit,* Pyramis.

II. *SI verò fuerit circulus: vocetur* Conus.

III. *ET punctum ſublime fixum vocetur* Vertex *Pyramidis, vel Coni.*

IV. *ATQVE figura plana ſubiecta vocetur* Baſis *eius.*

*ET perpendicularis à vertice ad baſim Pyramidis, vel conducta: vocetur eius* Altitudo. V.

*ET ſi quidem perpendicularis à vertice incidat non extra baſim: vocetur illa* Directa. VI.

*SI verò extra ceciderit: vocetur Pyramis* Inclinata. VII.

*ET recta à vertice ad angulum baſis pyramidis vocentur* Latera *eius.* VIII.

*ET qualibet recta à vertice ad circumferentiam circuli baſis coni: eius* Latus *vocetur.* IX.

*ATQVE recta à vertice ad centrum circuli baſis: vocetur* Axis Coni. X.

*CONI verò, quorum axes erecti fuerint ad baſim: vocentur* Recti. XI.

*ET quorum axes inclinati ſunt ad baſim vocentur* Scaleni. XII.

*SI à perimetro figura plana recta eleuata non in eius plano iacens reuoluatur ſemper ſibi ipſi æquidiſtanter conſtituta circa figura perimetrum, quouſque redeat ad locum, à quo moueri cœperat; atque ſuperficies genita ſecetur plano æquidiſtante figuræ ſubiecta: vocabitur ſolidum genitum, ſi figura ſubiecta rectilinea fuerit,* Priſma. XIII.

*SI verò fuerit circulus vocetur* Cylindrus. XIV.

*ET figura ſubiecta vocetur eius* Baſis. XV.

*ET recta linea translata in cylindro, & adherens angulis baſis Priſmatis inter baſim, & oppoſitum planum ei* XVI.

*parallelum interceptæ, vocetur* Latus *eius*.

XVII. *ET perpendicularis ad baſim intercepta inter oppoſita plana parallela*: Altitudo *eius vocetur*.

XVIII. *ATQVE linea ex centro baſis cylindri parallela lateri*: Axis *eius vocetur*.

XIX. *ET ſi latera perpendicularia fuerint ad baſes; erunt Priſma, & Cylindrus Recti*.

XX. *SI verò inclinata fuerint vocentur* Scaleni.

XXI. *PRISMA à ſex planis quadrilateris, quorum oppoſita ſint* Parallela, *contentum: vocetur* Parallelepideum.

XXII. *SIMILES Coni, & Cylindri ſunt, quorum axes æquè inclinati ſunt ad baſes, & proportionales ſunt diametris baſium*. Tabula VI. Fig. 38. 39.

Vt ſi fuerit figura plana A B C rectilinea, vel circulus; atque punctum E in ſublimi extra dictum planum, & à puncto A ad E iungatur recta AE atque recta AE circa punctum fixum E conuertatur per figuræ ABC perimetrum, quouſque redeat ad locum, à quo cæperat moueri; tunc quidem genita figura ſolida EABC habens ſubiectam figuram planam ABC rectilineam: vocabitur *Pyramis*. Si vero plana figura ABC fuerint circulus: vocabitur *Conus*.

Sed ſi recta linea AE, iacens extra planum figuræ ABC reuoluatur per

per figuræ ABC perimetrum ſemper tamen ſibi ipſi æquidiſtanter conſtituta dum mouetur, quouſque redeat ad locum à quo moueri cœperat, atque ſuperficies genita à recta AB reuoluta ſecetur plano E parallelo plano figuræ ABC; tunc quidem ſolida figura genita EABCE habens ſubiectam figuram planam ABC rectilineam, vocabitur *Priſma*; illa verò, quæ habet figuram ABC circulum, vocetur *Cylindrus*.

Et punctum E in pyramide, & Cono: *Vertex* vocetur; in omnibus autem dictis ſolidis figura plana ABC vocetur *Baſis* ſolidi; Et recta linea EG perpendicularis ad planum baſis ducta à vertice E, vel à plano oppoſito baſi: vocatur *Altitudo* ſolidi. Et in pyramide ſi dicta perpendicularis EG incidat non extra baſim ABC; tunc pyramis vocatur *Directa*; ſi verò extra cadat, vocetur piramis *Inclinata*.

Et recta linea EA tranſlata, vbicunque ſumatur, vocatur latus coni, vel cylindri; ſed angulos baſis contingens vocatur *latus* pyramidis, vel priſmatis.

Et recta linea EH à circuli centro H ad verticem ducta in cono, & parallela lateri EA in cylindro, vocetur *Axis* eius.

Coni, quorum axes perpendiculares fuerint ad baſes vocantur *Re-*

*ti*, reliqui verò *Scaleni*.

Priſma verò, & cylindrus, cuius latus perpendicularis fuerit ad planum baſis: vocabitur *Rectus*; reliqui verò *Scaleni*.

## PROPOSITIO XVI.

*Pyramis vel conus ſecetur plano parallelo baſi, erit ſegmentum eius ad partes verticis, Pyramis vel conus ſimilis priori; & ſectio erit figura plana ſimilis baſi, quæ erunt in duplicata ratione altitudinum eorum ſolidorum, quorum ſunt baſes.* Tabula VI. Figura 40. & Tabula VII. Figura 1.

Sit conus vel pyramis RACBM ſecta plano GKHS parallelo baſi ACBM, & RN ſit altitudo pyramidis, ſeu perpendicularis à vertice ad baſim ducta, quæ ſecet planum
a cor. pr 9. huius GKS in O; eritque *a* RO perpendicularis quoque ad planum GKS parallelum ipſi ACM. Dico primo figuram ſolidam RGKHS pyramidem eſſe ſimilem ipſi RACBM, & planam figuram GKHS ſimilem eſſe baſi ACBM, & inter ſe eſſe in duplicata ratione altitudinum RO, & RN. Quoniam duo plana parallela ACBM & GKHS ſecantur planis ijſdem triangulorum RAC, RCB, RBM & RMA. Ergo *b* eorum
b cor. pr 9. huius communes ſectiones AC, GK parallelæ-

rallelæ ſunt inter ſe, nec non CB, KH, pariterque BM, HS, atque MA, SG ſimiliter æquidiſtant. Vnde c figuræ planæ ACBM & GKHS æquiangulæ ſunt interſe; atque triangula d RAC, RGK æquiangula ſunt inter ſe, & ſimilia: Pariterque triangula RCB, RKH atque etiam triangula RBM, RHS, nec non triangula RMA, RSG ſunt inter ſe æquiangula, & ſimilia. Quare anguli ſolidi A & G æquales ſunt inter ſe, & circa eos latera RA ad AM proportionalia ſunt lateribus RG ad GS: pariterque CA ad AR erit, vt KG ad GR; Vnde ex compoſitione ordinata erit CA ad AM, vt KG ad GS. Eadem ratione anguli ſolidi B & H pariterque anguli ſolidi C & K; nec non ſolidi anguli M & S æquales erunt, exiſtente angulo ſolido R communi; & circa dictos angulos ſolidos æquales erunt, vt prius, latera proportionalia. Ergo e pyramis RGKHS ſimilis eſt pyramidi RACBM. Et quia duæ RA, RN ſecantur à duobus planis GH, AB parallelis inter ſe & conueniunt in R ergo f RN ad RO eſt vt RA ad RG, ſeu vt AC ad GK: ſunt verò figuræ planæ ACBM & GKHS æquiangulæ, quorum latera circa angulos æquales ſunt proportionalia, vt dictum eſt: Ergo g ſunt ſimilia, & h habent duplica-

c ex pr. 7. l. 4.
d ex pr. 6. l. 4.
e def. 8 huius.
f pr. 20 huius.
g pr. 6. l. 4.
h pr. 19. lib. 4.

eam proportionem lateris A C ad eius homologum GK. Eſtque RN
i ex pr. 19. vel. 3. ad RΘ, vt AC ad GK. Ergo i figura ACBM ad figuram GKHS duplicatam rationem habet altitudinis RN ad altitudinem RO. Poſtea in cono RAB per eius axim RV ducto
l 11. hu. 12. l. 4 quolibet plano RAB id à planis æquidiſtantibus A, B, G, H, l ſecabitur in rectis AB, GH parallelis inter
m 12. huius. ſe, quæ in axi iiſdē *m* rationibus diuidentur à tribus rectis RA, RV, RB. Ergo GK æqualis eſt KH, ſicuti radius circuli AV æqualis eſt radio VB quare omnes rectæ à puncto X ad perimetrum G H ſunt æquales interſe & ideo circulus eſt talis figura cuius radius KG ad radium VA eandem rationem habet quam axis KR ad axim VR, vel quam altitudo OR ad NR. Quæ erant oſtendenda.

PROPOSITIO XVII. *In Priſmate, vel cylindro latera omnia æqualia ſunt inter ſe, & figura plana parallela baſi æqualis, & ſimilis eſt baſi.* Tab. VII. Fig. 2.

Sit Priſma, vel Cylindrus AEGC, & planum parallelum baſi ſit EFG. Oſtendendum eſt latera omnia æqualia eſſe inter ſe; & in priſmate rectilineam figuram EFG æqualem, & ſimilem eſſe baſi ABC; in cylindro verò figuram EG circulum

lum eſſe æqualem circulo AC. A puncto F, vbi axis BF cylindri ſecatur plano EG, ducantur ad perimetrum figuræ EG quælibet rectæ FE, FG, ponanturque cylindri latera EA, GC, iunganturque rectæ AB, BC. Quoniam *a* in vtroque ſolido bina latera, vel latus AE, & axis BF ſunt parallela inter ſe: Ergo *b* in vno ſunt plano, & ab hoc plano ſecantur parallela plana AC, EG: Igitur *c* ſectiones oppoſitæ AB, EF parallelæ ſunt inter ſe, & *d* ſpatium AF parallelogrammum erit, cuius oppoſita latera AB ipſi EF, atque AE ipſi BF æqualia erunt. Eadem ratione BG, parallelogrammum erit, & CG ipſi BF, ſeu lateri AE æquale erit, atque CB ipſi GF æquale, & parallelum erit, ſicuti AB, EF æqualia, & parallela erant. Ergo *e* angulus ABC æqualis eſt angulo EFG, & ſic reliqui omnes anguli in priſmate æquales erunt; atque circa æquales angulos latera ſunt proportionalia (cùm duo *f* æqualia AB, EF ad duo æqualia CB, GF in eadem ſint ratione, & ſic reliqua omnia latera circa reliquos æquales). Igitur *g* figura EFG ſimilis, & æqualis eſt figuræ rectilineæ ABC; cùmque in cylindro à puncto F ſumpto intra figuram EG quælibet rectæ FE, FG eductæ æquales ſint radijs AB, CB, & ideo æquales inter

*a def. 16 18. ſecun hu.*
*b pr. 14 lib. 1.*
*c corol. pr. 9. hu.*
*d pr. 26 lib. 1.*
*e ex pr. 7. l. 4.*
*f pr. 3 lib. 3.*
*g pr. 18 lib. 11. c*

h def. 8 lib. 1. i axio. lib. 2.

ter ſe. Ergo *b* figura EG circulus eſt, cuius centrum F æqualis *i* circulo AC: fuerunt autem latera AE, CG & ſic reliqua omnia latera oſtenſa æqualia tam in priſmate, quàm in cylindro. Patet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XVIII. *Si ſuper baſe pyramidis triangularis directæ duo priſmata recta deſcribantur infra verticem pertingentia: ſupremum priſma circumſcriptum, & maius erit fruſto pyramidis ſupremo, & infimum priſma inſcriptum, minus erit inferiori fruſto pyramidis.* Tabula VII. Figura 3. 4.

Super baſe ABC triangularis directæ pyramidis RABC deſcripta ſunt duo priſmata recta ABP & AVB, quæ ſecent pyramidem infra verticem R in planis DEF, & GHK parallelis baſi ABC. Dico ſupremum priſma AVB circunſcriptum & maius eſſe fruſto ſupremo pyramidis AFB, & infimum priſma APB inſcriptum & minus eſſe pyramidis infimo fruſto AKB. Et primò RBH perpendicularis à vertice R, incidat in angulum B. Quoniam duæ rectæ RH & VCP ſunt latera priſmatis recti, perpendiculares erunt ad planum ABC, ſiue ad *a* planum GHK ei parallelum: *b* Ergo anguli RBC, VCB recti ſunt, & VP

a coroll. prop. 9. huius. b pr. 2. & pr. 5

paral-

parallela eſt ipſi RH, & e in eodem plano trianguli RHK exiſtunt, in quo rectæ CB & BH iacent: Sed in triangulo RBC eſt angulus B rectus: ergo d angulus RCB eſt acutus; & ideo perpendicularis VC cadit extra triangulum RKH & eius productio CP intra idem triangulum cadet: Eadem ratione recta SA intra triangulum RGH, & eius productio AZ extra ipſum cadet. Quare parallelogrammum AP intra pyramidem, & parallelogrammum AV extra ipſam cadet; & propterea priſma APB intra fruſtum AKB inſcriptum erit, & minus erit illo atque priſma AVB circunſcriptum, & maius erit fruſto pyramidis AFB.

c pr. 14 lib. 2.

d ex pr. 18 lib. 1

Secundò cadat perpendicularis RN, aut in latere AB, aut intra triangulum ABC in puncto N, & per latera pyramidis, & per perpendicularẽ RN plana ducantur: diuiſa erit pyramis in duas, aut tres pyramides; & in qualibet earum perpendicularis à vertice incidit in angulum baſis; & e propterea omnia infima priſmata ſuper baſes deſcripta, ideſt priſma ex eis compoſitum ABP inſcriptum, & minus erit infimo fruſto pyramidis ABK, & omnia ſuprema priſmata ſuper eaſdem baſes deſcripta, ideſt priſma ex eis compoſitum ABV circun-

e parte 1. huius

ſcri-

ſcriptum, & maius erit pyramidis ſupremo fruſto ABF. Quare patet propoſitum.

PROPOSITIO XIX *Si per rectam lineam baſim coni, vel cylindri ſecantem, vel tangentem, & per latus ſolidi planum ducatur: quod per ſecantem ducitur intra ſolidum cadet; quod verò per tangentem ducitur continget ſolidi ſuperficiem, & extra ſolidum cadet.* Tab. VII. Fig. 5.6.

Sit conus, aut cylindrus, cuius baſis BCD, ſummitas A, & recta linea BC ſecet baſim ſolidi, at recta BF tangat eam in B, & poſito latere BA ducantur plana ABCA & ABFA. Dico planum ABCA intra ſolidum cadere, & planum ABFA tangere ſolidi ſuperficiem, & extra ipſum cadere. Quia latus AB in ſuperficie ſolidi exiſtit, & eſt quoque in plano ABCA, vel in plano ABFA: Ergo a in eorum communi ſectione, vel contactu exiſtit. Quare planum ABCA; nec non planum ABFA *ſecat*, vel tangit ſolidi ſuperficiem in recta linea AB. Eadem ratione planum ABCA ſecat ſolidi ſuperficiem in latere AC à puncto C ducto. Suntque rectæ AB, AC latera coni, ergo in eo efficiunt triangulum ABC per verticem ductum & ſecantem circulum baſis in recta linea BC in-

*a axio. 3. huius*

tra

tra conum poſita. Et ideo planum ABC conum ſecabit. At in cylindro rectæ lineæ AB, AC eius latera, quæ ſunt parallela interſe, quæ b parallelogrammum ABCA conſtituent; ideoque ſecat circulum baſis in recta BC poſita intra cylindrum; & ideo planum ABCA cylindrum ſecabit. Poſtea quia recta BF circulum tangens in B cadit tota extra ipſum, ex pr. 21. lib. 2., ergo planum ABFA per latus AB & per tangentem BF extenſum cadet extra ſuperficiem coni vel cylindri. Quod erat &c. *b ex 18 huius.*

PROPOSITIO XX. *Si triangulum, & parallelogrammum ſuper æqualibus rectis lineis deſcripta, fuerint inter ſe æqualia: ſuper eadeſcripta priſmata recta æquè alta erunt, æqualia inter ſe.* Tab. VIII. Fig. 7.

Sint triangulum ABC, & parallelogrammum DG æqualia inter ſe, quorum latera BC & EG æqualia inter ſe ſint. Dico priſmata recta ſuper his ſpatijs deſcripta, quorum altitudines æquales ſint rectæ lineæ T, eſſe inter ſe æqualia. a Secetur AC bifariam in O, & b per O ducatur recta OM parallela BC ſecans AB in M, & c fiat angulus CBP æqualis angulo E, d & conpleatur parallelogrammum BPQC, ducaturque CN parallela e BA, ſecans f MPO in N. Quoniam duæ rectæ AC MN

*a prop. 9. lib. 1*
*b cor. pr 16. l. 1.*
*c pr. 14 lib. 1.*
*d pr. 26 lib. 1.*
*e cor. pr 16. l. 1*
*f ex pr. 29. l. 1.*

MN, conuenientes in O ſecantur à parallelis BM & CN: Ergo g triangula AMO & CNO ſimilia ſunt, & habent latera homologa AO, CO æqualia. Ergo h triangula AMO, CNO etiam æqualia inter ſe ſunt. & quoniam, facta intellectuali applicatione baſes AMO & CNO ſimiles, & æquales ſibi mutuò congruunt, altitudines verò ab angulis A, M, O, C, N, perpendiculariter eleuatæ ad plana triangulorum congruentium, cum æquales ſunt inter ſe, pariter ſibi mutuò congruent (aliàs i ab ijſdem punctis binæ perpendiculares duci poſſent ad ſubiectum planum quod eſt impoſſibile) Ergo plana per congruentes perpendiculares extenſa, & per earum ſummitates ducta ſibi mutuò congruent. Vnde figuræ ipſæ ſolidæ conpræhenſæ ſibi mutuò congruent; & ideo priſmata, quorum baſes triangula AMO & CNO, altitudines verò æquales rectæ T, erunt inter ſe æqualia, additoque communi priſmate recto eiuſdem altitudinis, cuius baſis quadrilaterum MBCO, cum quo priora priſmata recta triangularia æquè alta vnicũ priſma conſtituent (eo quod à puncto O perpendicularis eleuata ad planum ABCO eſt latus commune trium priſmatum rectorum, quorum baſes conueniunt in O, & ſic reliquæ perpen-

g ex pr. 9. l. 4.

h ex pr. 17. l. 4

i ex pr. 3. huius

pen-

pendiculares) , erunt priſmata re-
cta altitudine T deſcripta, quorum
baſes triangulum ABC, & paralle-
logrammum BN, æqualia inter ſe.
Rurſus quoniam ſuper recta MOQ
ductæ ſunt MB, NC parallelæ in-
ter ſe pariterque PB, QC paral-
lelæ inter ſe: Ergò triangula *l* l ex pri
MBP & NCQ ſimilia ſunt, & *m* æ- 7. l. 4.
qualia, cùm latera homologa MB, m ex pr
NC oppoſita *n* in parallelogrammo 17. l. 4
NB æqualia ſint. Quare, (vt prius n pr. 26
dictum eſt) priſmata recta altitudi- lib. 1.
ne T deſcripta, quorum baſes trian-
gula æqualia, & ſimilia MBP, NQ
C ſunt æqualia inter ſe; & addito
communi priſmate recto eiuſdem
altitudinis T, cuius baſis quadrila-
terum BPNC: erunt priſmata recta
altitudine T deſcripta, quorum ba-
ſes parallelogrammum MBCN, &
parallelogrammum PBCQ æqualia
inter ſe; ideoque priſmata recta al-
titudine T deſcripta, quorum baſes
triangulum ABC, & parallelogrã-
mum PBCQ æqualia erunt inter ſe.
Et quoniam parallelogrammum EK
æquale erat triangulo ABC, & huic
triangulo æquale eſt parallelogram-
mum MBCN, *o* ſeu PBCQ (cùm o pr. 31
æqualibus triangulis AMO, CNO lib. 1.
addatur commune quadrilaterum M
OCB): Ergo parallelogramma E
K, PBCQ æqualia ſunt, & habent p ex pri
baſes BC, EG æquales; *p* ergo ſunt 1. l. 4.
æque

æquè alta; quare (vt in pr. 30. lib. 1. oſtenſum eſt) circa angulos PBC & æquales eorum latera eleuata PB, DE æqualia erunt; & propterea *q* eadem parallelogramma ſimilia erunt. Quapropter prismata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes parallelogramma EK & PBCQ ſimilia, & æqualia; erunt pariter æqualia inter ſe. Oſtenſa autem fuerunt æqualia inter ſe priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum ABC, & parallelogrammum PBCQ Igitur priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum ABC, & parallelogrammum EK æqualia erunt inter ſe. Quod erat, &c.

*q pr. 16 lib. 4.*

PROPOSITIO XXI. *Si duo priſmata recta triangularia baſes, & altitudines æquales habuerint: erunt inter ſe æqualia.* Tab. VII. Fig. 8.

Sint duo priſmata recta, quorum baſes ſint quælibet triangula A & B æqualia inter ſe, altitudines verò æquales ſint rectæ lineæ P. Dico priſmata ipſa eſſe inter ſe æqualia. Fiat *a* parallelogrammum CE æquale triangulo A, & parallelogrammũ MG æquale triangulo B in angulo GEM æquali angulo DEF, quorũ baſes FE & EG ſint æquales baſibus triangulorũ, & diſponantur in directum vt DE & EM in directum pariter ſint; *b* (aliàs non efficerent angulo

*a ex pr. 20. l. 4*

*b ex pr. 14. l. 1.*

æqua-

æquales ad verticem E); Et perficiantur c parallelogramma FM, DG & ON, ducanturque diametri NE, OE. Quoniam parallelogramma CE & EH æqualia ſunt triangulis A & B æqualibus inter ſe; Ergo ipſa parallelogramma erunt inter ſe æqualia: Quare d erit reciprocè, NE ad EG, ita ME ad ED; & e permutando, erit ut FE ad EM, ita GE ad ED, & ſic reliqua latera proportionalia oſtendentur. Quare parallelogramma FM & DG, quæ f habent latera homologa circa angulos æquales in directum poſita, ſimilia erunt inter ſe; & g propterea diametri OE, NE erunt in directum; h quæ ſecabunt ſingula parallelogramma FM, DG, CH in duo triangula æqualia, & i ſimilia quæ ſunt æquiangula. Et quia priſmata recta quorum baſes triangula ſimilia & æqualia CQN, QNH, & communis altitudo æqualis eſt rectæ P, ſunt inter ſe æqualia: Ergo ſi ab eis auferantur priſmata recta æqualia, quorum baſes triangula ſimilia, & æqualia OFE & OME, communis altitudo æqualis P, remanebunt duo priſmata recta æqualia, quorum baſes quadrilatera CFEN & HMEN, altitudines æquales P. Et ſi rurſus ab his auferantur priſmata recta æqualia, quorum baſes triangula ſimilia, & æqualia EDN & EGN, altitu-

c pr. 26 lib. 1.

d pr. 14. lib. 4.

e pr. 12. lib. 3.

f pr. 16. lib. 4.

g pr. 19. lib. 4.

h pr. 26 lib. 1.

i prop. 4 lib. 4.

titudines æquales P, remanebunt duo priſmata recta, quorum baſes parallelogramma CE & EH, altitudines æquales P, quæ erunt neceſſariò æqualia inter ſe; *l* ſed priſmata recta, quorum baſes æquales triangulum A, & parallelogrammum CE ſuper æqualibus rectis deſcripta, altitudines æquales P, ſunt æqualia inter ſe; pariterque priſmata recta quorum baſes æquales triangulum B, & parallelogrammum EH, altitudines æquales P, ſiunt æqualia inter ſe. Ergo duo priſmata recta quorum baſes triangula A & B quorum altitudines æquales P, inter ſe æqualia ſunt. Quod erat oſtendendum.

*l pr. 20 huius.*

**PROPOSITIO XXII.** *Cuilibet pyramidi triangulari directa figura compoſita ex priſmatibus rectis æquè altis circunſcribi poteſt, & altera inſcribi, ita vt circunſcripta vel inſcripta differentia à pyramide minor ſit quacunque data magnitudine. Vocentur huiuſmodi figura* Gradatæ *pyramidi* Adſcriptæ. Tab. VII. Fig. 9.

Sit pyramis triangularis DABC & DB perpendicularis à vertice incidat nō extra baſim ABC, & ſit data quælibet magnitudo &c. Dico fieri poſſe quod proponitur. *a* eleuetur EA perpendicularis ad planum ABC, & reuoluatur vt præcipit 13. def.

*a prop. 6 huius.*

ef.2.huius,factũ erit priſma *b* rectũ | *b def. 19 hu. sec.*
EC ſuper baſim ABC altitudine B
) & hæc altitudo diuidatur bifariã *c*
n M, & *d* per M ducatur planum | *c pr. 9. lib. 1.*
arallelum baſibus: erit iam vniuer | *d ex pr 10. hu.*
um priſma BEC ſectum in duo priſ
nata recta æqualia inter ſe (eo quod
am baſes ABC, EDY, quàm alti
udines perpendiculares MD, MB
quales ſunt inter ſe); Et ſi rurſus
IB bifariam ſecetur in G, & per
planum GFH parallelum baſibus
ucatur: erit rurſus priſma AGC
miſſis præcedentis; Et ſi denuo
æc bipartita ſubdiuiſio reſiduorum
ltitudinum, & ductio planorum
emper repetatur, remanebit *e* tan- | *e ex pr. 27. l. 1.*
em aliquod priſma minus quacun-
ue magnitudine propoſita. Ergo
epertum iam ſit priſma BFC minus
agnitudine &, perque *f* reliquas | *f ex pr. 10. hu.*
ectiones M, P æqualiter diuidentes
ltitudinem BD, plana MLN & O
Q ducantur parallela baſi ABC;
oſtea *g* deſcribantur duo priſmata | *g def. 19 sec. huius.*
ecta ſuper baſim GIK ſupra, & in-
ra ſectionem in planis immediatè
equentibus terminata, *h* quorum | *h præs. huius.*
nfimum IBK priſma inſcriptum
erit fruſto pyramidis inferiori AKB,
& ſupremum priſma RGS circun-
ſcriptum erit fruſto ſuperiori LKM,
quæ duo priſmata erunt æqualia,
cum eandem baſim IGK, & æquales
altitudines perpendiculares GM, G

B ha-

habeant. Pari modo ſuper baſim LMN cum altitudinibus æqualibus MP, MG deſcribantur duo priſmata æqualia, LGN inſcriptum fruſto pyramidis LGK, & priſma LVM circunſcriptum fruſto pyramidis O NM. Similiter ſuper baſim OPQ cum æqualibus altitudinibus PD, PM deſcribantur duo priſmata æqualia, OMQ inſcriptum fruſto pyramidis QNM, & priſma OZP circunſcriptum fruſto pyramidis DOQ P, & ſic vlterius procedatur in reliquis ſectionibus, ſi plures extiterint.

Patet ergo, quòd priſmata omnia recta KBI, NGL, QMO inſcripta pyramidi, ſimul ſumpta, æqualia ſunt priſmatis GRK, MTN, PXQ circunſcriptis pyramidi ſimul ſumptis, id eſt figura ex priſmatis compoſita circunſcripta pyramidi DABC abſq; infimo priſmate BFC, æqualis eſt figuræ ex priſmatis compoſitæ inſcriptæ eidem pyramidi. Quare exceſſus, quo figura vniuerſa circunſcripta pyramidi ſuperat figuram inſcriptam eidem pyramidi æqualis eſt priſmati BFC. At ſolidum BFC minus eſt propoſita magnitudine &: Ergo exceſſus quo figura tota circunſcripta pyramidi ſuperat figuram inſcriptam eidem pyramidi minor eſt magnitudine &; Sed pyramis DABC pars eſt, & ideo minor, quàm figu-

ra pyramidi circunſcripta, & eadem pyramis totum eſt, & ideo maior figura eidem inſcripta. Quare differentia figurarum inſcriptæ pyramidi à circunſcripta maior eſt, quàm differentia inter figuram circunſcriptam, aut inſcriptam, & pyramidem ipſam; differentia verò dictarum figurarum circunſcriptæ, & inſcriptæ minor eſt magnitudine &. Ergo exceſſus, aut defectus, quo circunſcripta, aut inſcripta excedit, aut deficit à pyramide, minor eſt magnitudine &. Quod fieri poſſe oſtendendum erat. Vocentur dictæ figuræ, ex priſmatis rectis æquè altis compoſitæ, *Gradatæ* figuræ pyramidi adſcriptæ.

PROPOSITIO XXIII. *Si duæ triangulares Pyramides directæ habuerint baſes, & altitudines æquales: erunt inter ſe æquales.* Tabula VII. Figura 10.

Sint duæ pyramides CA, DB, quarum baſes triangula A, B æqualia, & altitudines perpendiculares CA, DF non extra baſes cadentes, ſint etiam æquales. Dico pyramides æquales eſſe inter ſe. Adſcribantur *a* pyramidi CA duæ figuræ gradatæ KLM circunſcripta, & N O inſcripta, ita vt differentia figuræ KLM, aut NO à pyramide CA minor ſit quacunque magnitudine N data: *a prop. 22. huius.*

 data:

data: ſintque figuræ genitæ à planis parallelis baſi triangula A, G, N, I, altitudines priſmatum comprehendentium figuras adſcriptas ſint æquales ipſi HA. Poſtea *b* perpendicularis DF in tot partes æquales vni QF diſtribuatur, in quot partes æquales vni AH diuiſa fuit perpendicularis CA, & *c* per ſingula diuiſionum puncta plana parallela baſi efficiant *d* triangula P, V, Z ſimilia ipſi B: & *e* compleantur figuræ gradatæ circunſcripta RSF, & inſcripta VX. Et quoniam HA, QF æquè metiuntur æquales altitudines CA, DF: Ergo *f* HA, QF æquales ſunt & ſic reliquæ altitudines priſmatum rectorum æquales erunt: habent *g* verò triangula æqualia A, B ad duo triangula illis ſimilia G, P eandem proportionem duplicatam altitudinis AC ad HC, ſeu FD *h* ad QD, cùm tam CA, DF, quàm CH, DQ æquales ſint. Ergo *i* triangula G, P æqualia ſunt. Eadem ratione æqualia erunt triangula N, V, &c. Tandem *l* priſmata recta, quorum baſes triangula æqualia A, B, altitudines HA, QF æquales etiam, erunt inter ſe æqualia: eadem ratione reliqua priſmata recta numero æqualia comprehendentia gradatas figuras circunſcriptas, & inſcriptas æqualia erunt inter ſe. Quapropter duæ figuræ gradatæ KLM, RSF circunſcrip.

*b pr. 28 lib. 1.*
*c ex pr. 10. hu.*
*d ex pr. 16. hu.*
*e pr. 22. huius.*
*f prop. 2 lib. 3.*
*g pr. 18 huius.*
*h pr. 3. & 19 lib. 5.*
*i pr. 4. lib. 3.*
*l pr. 21. huius.*

ſcriptæ pyramidibus CA, DB æquales erunt: pariterque duæ figuræ gradatæ inſcriptæ NO, VX erunt æquales; & hoc ſemper verum erit quacunque exiſtente differentia pyramidis CA à figura gradata KLM, vel NO. Quapropter erunt duæ magnitudines, prima pyramis CA, ſecuuda pyramis DB; & figura gradata KLM, maior, quàm prima (exceſſu minore quolibet dato) eſt quoque maior ſecunda, cùm figura KLM æqualis ſit RSF circunſcriptæ, & ideo maioris pyramide DB; atque figura gradata NO minor, quàm prima (defectu minore quolibet dato) eſt quoque minor ſecunda, cùm figura NO æqualis ſit VX inſcriptæ, & ideo minoris pyramide DB. Ergo *m* pyramis CA æqualis eſt pyramidi DB. Quod, &c. *m ex pr 24. lib. 5.*

PROPOSITIO XXIV. *Si duæ pyramides triangulares inclinata habuerint baſes & altitudines æquales, erunt æquales inter ſe.* Tabula VII. Fig. 12. 13.

Sint duæ pyramides DABC, & KHGH, quarum baſes, triangula ABC, GFH æqualia inter ſe, & perpendiculares à ſummitatibus ad baſes ductæ DE, KM ſint æquales inter ſe, & cadant extra baſes pyramidum: Dico pyramides eſſe æquales inter ſe. A terminis perpendi-

cularium E, & M ad angulos baſium coniungantur rectæ EA, EC, EB, MG, MF & MH, & in figuris EABC & MGFH ſumantur puncta C & O, vbi conueniunt triangula omnia, in quæ dictæ figuræ reſoluuntur; & *a* eleuentur CR, ON æquales ipſis DE & MK & perpendiculariter ad plana baſium EAB, MGFH, & coniungantur rectæ AR, BR, ER, GN, FN, HN, MN. Quoniam duæ pyramides DABE & RABE triangulares eandem baſim ABE habent, & æquales altitudines DE, RC, quæ non *incidunt* extra baſim: ergo *b* pyramides DABE & RABE æquales ſunt inter ſe. Rurſus quia ſuper eadem baſi BCE cum æqualibus altitudinibus DE, RC non cadentibus extra baſim factæ ſunt duæ pyramides triangulares DBEC & RBEC. *c* Ergo *hæ* æquales ſunt inter ſe, quæ ſi à *prioribus* æqualibus pyramidibus DABE, RABE tollantur, remanebunt pyramides DABCE & RABCE æquales inter ſe. Et, ſi ab his tollantur duæ triangulares pyramides æquales DACE & RACE (quæ eandem baſim ACE habent, & altitudines æquales DE, RC non cadentes extra baſim) remanebunt pyramides DABC & RABC æquales inter ſe. Eadem ratione pyramis inclinata KGFH æqualis erit directæ

*a pr. 3. lib 1. & pr. 6. hu*

*b prop. 23. hu.*

*c pr. 23. huius.*

ctæ pyramidi NGFH ſuper cõmuni baſi GFH, quæ habet altitudinem NO æqualem illius altitudini KM. Eſt verò *d* pyramidi NGFH æqualis pyramis RABC, quia eorum baſes GFH & ABC æquales ſuppoſitæ ſunt, & altitudines NO, RC non cadentes extra baſes ſunt æquales, cùm ſint æquales duabus æqualibus KM, DE. Ergo pyramis KGFH æqualis eſt pyramidi RABC; ſed eidem pyramidi RABC oſtenſa fuit æqualis pyramis DABC. Ergo duæ pyramides KGFH, DABC æquales ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

*d prop. 23. hu.*

PROPOSITIO XXV. *Qualibet pyramides eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes.* Tabula VII. Figura 12. 13.

*EVCL. 5. & 6. XII.*

Sint duæ pyramides primò triangulares DABC & MFGH, quarum altitudines DE, MO æquales ſint. Dico pyramidem DABC ad pyramidem MFGH eandem proportionem habere, quam baſis ABC ad baſim FGH. Producatur HF indefinitè verſus F, vt in S, & *a* ſecetur FO, quæ ſit quælibet menſura ipſius FH, & ſumatur SF quælibet multiplex eiuſdem FO, & compleantur pyramides triangulares MFOG, MFGS. Et quia *b* quoties FO metitur FH, toties triangulum FG

*a prop. 28. l. 8*

*b ex pr. 32. lib. 1*

O menſurat triangulum FGH, at-
*c ex pr. 24. hu.* que *c* quoties triangulum FGO me-
titur triangulum FGH, toties pyra-
mis MFGO menſurat pyramidem
*d prop. 7. l. 3.* MFGH. Ergo *d* triangulum FGO
& pyramis MFGO æquè metiuntur
triangulum FGH, & pyramidem
MFGH. Eadem ratione quoties OF
metitur ipſam FS, toties triangu-
lum FOG ipſum triangulum SFG,
atque pyramis MFOG pyramidem
*e Def. 6. l. 3.* MFSG metientur; & propterea, *e*
triangulum SFG ipſius FGH, atque
pyramis MFSG pyramidis MFGH
qualibet, & eædem partes erunt,
quemadmodum SF partes eſt ipſius
FH. Vnde erunt quatuor magnitu-
dines, prima baſis ABC, ſecunda
baſis FGH, tertia pyramis DABC,
quarta pyramis MFGH, & duæ a-
liæ, ſcilicet triangulum FSG, & py-
ramis MFSG, quæ ſunt qualibet,
& eædem partes conſequentium,
ideſt habent ad triangulum FGH,
& ad pyramidem MFGH quamli-
bet & eandem rationem commenſu-
rabilem, & *f* quoties triangula SF
*f pr. 23. & 24. huius.* G & ABC æqualia ſunt, etiam æquè
altæ pyramides MFSG & DABC
ſunt æquales; & quoties triangulum
SFG maius eſt triangulo ABC, eti-
am pyramis MFSG maior eſt pyra-
mide æquè alta DABC, & quotieſ-
cunque illud minus eſt, hæc quo-
*g pr. 23 Lib. 3.* que eſt minor illa. Ergo *g* baſis AB

C ad

C ad baſim FGH eandem rationem habet, quam pyramis DABC ad pyramidem MFGH.

Sint ſecundò duæ pyramides ACF & IKM æquè altæ, baſes verò quæcunque polygona FC, KM. Dico eſſe pyramidem ACF ad pyramidem IKM, vt baſis CF ad baſim KM Diuidantur polygona baſium in triangula ductis rectis BD, BE & GO, & plana per has rectas ad vertices coniungantur. Quoniam *h* vt baſis BCD ad BDE ita eſt pyramis ABCD ad piramidem ABDE (eo quod ſunt triangularia, & eiuſdem altitudinis) erit *i* coniungendo vt polygonum CE ad triangulum BDE, ita pyramis ACE ad pyramidem ABDE. Et rurſus quia, vt baſis BDE ad BEF, ita pyramis triangularis ABDE ad pyramidem ABEF æquè altam: ergo *l* ex compoſitione ordinata vt poligonum CE ad triangulum BEF, ita eſt pyramis ACE, ad pyramidem ABEF; & iterum *m* coniungendo erit, vt polygonum CF ad triangulum BFE, ita pyramis ACF ad pyramidem ABEF. Eadem ratione erit, vt triangulum GKO ad polygonum KM, ita pyramis IKGO ad pyramidem IKM; Eſt autem *n* vt baſis trianguli BFE ad triangulum GKO, ita pyramis ABFE ad pyramidem IKGO (propterea quod

*h par. 1 huius.*

*i prop. 14. l. 3.*

*l pr. 19. l. c. 3.*

*m prop. 14. l. 3.*

*n par. 1. huius.*

altitudines ambarum pyramidum triangularium æquales ſunt ex hypotheſi). Ergo *e* ex compoſitione ordinata ratio polygoni CF ad polygonum KM eadem erit, quæ pyramidis ACF ad pyramidem IKM. Quod erat, &c.

*e pr. 19 lib. 3.*

PROPOSITIO XXVI. *In cono dato poſſibile eſt pyramidem circunſcribere, & alteram inſcribere, ita ut illarum differentia à cono minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Vocentur huiuſmodi pyramides* Adſcriptæ *cono.* Tabula VII. Figura 14.

Sit conus cuius vertex B, baſis circulus A, & quælibet magnitudo X Dico poſſe circunſcribi, & inſcribi in dato cono duas pyramides, quarum differentia à cono minor ſit magnitudine X. Ad *a* planum cuiuslibet trianguli DEF eleuetur perpendicularis CF, quæ *b* fiat æqualis altitudini coni B A, & ductis planis compleatur pyramis CDFE. iam ſi à C per rectam FG ſecantem *c* triãgulum FDE bifariam ducatur planum, *d* ſecabitur pyramis CDFE bifariam, & ſi rurſus aliud planum à C per FH ſecantem triangulum FGE bifariam ducatur, erit pyramis CGFE ſecta bifariam, & cùm hoc ſemper fieri poſſit: manifeſtum

*a prop. 6. huius*
*b pr. 3. lib. 1.*
*c ex pr. 30. l. 2.*
*d ex pr. 24. hu.*

eſt

eſt e relinqui ex ea tandem aliquam pyramidem minorem quacunque magnitudine X: Sit illa CHFE; f poſtea circulo A circunſcribatur polygonum regulare KMN, & aliud OPQ illi ſimile inſcribatur ità vt illorum differentia minor ſit baſe FHE; g & ductis planis per omnia latera polygonorum ad verticem B, deſcriptæ erunt duæ pyramides, habentes communem verticem B, quarum baſes KMN, & OPQ, ideoque eiuſdem altitudinis cum cono, & pyramide CFHE. Et quoniam omnia latera polygoni OPQ ſecant circulum A, & omnia latera figuræ KMN tangunt circulum A: Ergo h plana omnia pyramidis BOPQ conum ſecabunt, & omnia plana pyramidis BKMN extra conum cadent ideoque pyramis BOPQ inſcripta, & minor erit cono BA, & pyramis BKMN circunſcripta, & maior erit cono BA. Et quoniam, i vt pyramis BKMN ad pyramidem BOPQ, cùm ſint eiuſdem altitudinis, ita eſt baſis KMN ad OPQ. Ergo l diuidendo vt differentia pyramidum BKMN, & BOPQ ad pyramidem BOPQ ita erit differentia polygonorum KMN & OPQ ad polygonum OPQ: Rurſus vt m pyramis BPQ ad pyramidem CFHE, cum ſint eiuſdem altitudinis, ità eſt baſis OPQ ad baſim FHE. Ergo n ex

e ex pr. 27. l. 2.
f prop. 9. l. 5.
g po. 2. huius.
h prop. 19. hu.
i pr. 25. huius.
l prop. 13. l. 3.
m prop. 25. hu.
n pr. 19 lib. 3.

compoſitione ordinata, vt differentia pyramidum BKMN, & BOPQ ad pyramidem CFHE, ita eſt differentia polygonorum KMN, & OPQ ad planum FHE: ſed differentia polygonorum KMN, & OPQ plano FHE minor eſt: Ergo *o* differentia pyramidum BKMN, BOPQ minor eſt pyramide CFHE; ſed hæc pyramis minor erat magnitudine X: Ergo differentia pyramidum BKMN, & BOPQ adhuc minor erit magnitudine X; Eſt verò conus BA maior pyramide inſcripta BOPQ & minor pyramide circunſcripta BKMN. Quare exceſſus, quo pyramis BKMN ſuperat conum; aut defectus, quo pyramis BOPQ deficit à cono, multo minor erit, quàm differentia pyramidum BKMN, & BOPQ; ideoque minor quacunque data magnitudine X. Quod propoſitum fuerat.

*o ex pr. 16. l. 3.*

EVCL. 11. XII. PROPOSITIO XXVII. *Coni eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes*, Tab. VII. Fig. 15.

Sint duo coni, quorum baſes circuli A & B; vertices verò F, H, & eorum altitudines FG, HO, æquales ſint. Dico conum FA ad conum HB eandem rationem habere, quam circulus A ad circulum B. Adſcribantur *a* cono FA duæ pyramides FCDE, & FKMN quarum differentia

*a pr. 26 huius.*

tia à cono minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Poſtea *b* circulo B circunſcribatur polygonum regulare PRS ſimile polygono CDE; Pariterque eidem inſcribatur polygonum regulare TVX ſimile polygono KMN, & *c* ab omnibus lateribus dictarum figurarum eleuentur plana ad verticem H pertingentia, vt perficiantur duæ pyramides, altera HPRS circunſcripta, *d* & maior cono HB, altera verò HTVX inſcripta; & ideo minor eodem cono. Et quoniam tam pyramides circunſcriptæ, quàm inſcriptæ altitudines FG, HO æquales habent, *e* erunt inter ſe, vt baſes; ſed *f* circunſcripta polygona baſium CDE, PRS ſunt inter ſe in duplicatâ ratione radiorum ſiue vt *g* circuli A, B: Pariterque polygona KMN & TVX ſunt inter ſe, vt circuli A & B: Ergo; *h* vt pyramis FCDE ad pyramidem HPRS, ità erit circulus A ad circulum B; & in eadem ratione erit pyramis FKMN ad pyramidem HTVX. Ergo ſunt duæ magnitudines, prima conus FA, ſecunda conus HB, & ratio data circuli A ad circulum B, & duæ aliæ vnà maiores prima, & ſecunda, ſcilicet pyramides FCDE, HPRS conis circunſcriptæ ſunt in ratione A ad B, & exceſſus à prima, ſcilicet differentia pyramidis FCDE à cono

b ex pr. 4. l. 5.

c po. 1. huius.

d ex pr. 19. hu.

e prop. 25. hu.

f prop. 10. l. 5.

g pr. 12. l. 5. et pr. 7. l. 5.

h prop. 7. l. 3.

FA minor minor eſt quacunque magnitudine data; pariterque duæ aliæ vna minores prima, & ſecunda, ſcilicet pyramides FKMN & HTVX conis inſcriptæ, ſunt in eadem ratione A ad B, & defectus à prima, ſcilicet differentia pyramidis FKMN à cono FA minor eſt quacunque data magnitudine. Ergo *i* prima ad ſecundam, ſcilicet conus FA ad conum HB eſt quoque in eadem data ratione circuli A ad circulum B, baſis ad baſim. Quare, &c.

i *ex pr. 24. l. 3.*

EVCL. 7. XII. et 28. 29. 30. 31. XI.

PROPOSITIO XXVIII. *Si piramis, & priſma æquales baſes, & æquales altitudines habuerint, erit pyramis tertia pars priſmatis. Et duo priſmata æquales baſes & altitudines æquales habentia æqualia ſunt inter ſe*. Tabula VII. Fig. 16. 17.

Sit priſma DBF, & pyramis KGHM, quarum altitudines ſint æquales, & baſes ABC & GHM ſint pariter æquales. Dico pyramidem ipſius priſmatis tertiam partem eſſe. Et primò ſit priſma triangulare, & in tribus eius parallelogrammis ducantur diametri DC, AE & CE, & per duas quaslibet diametros in vno puncto conuenientes *a* plana ducantur, vt priſma diuidatur in tres pyramides, quarum duæ *b* CBAE & CADE æquales ſunt inter ſe, quia *c* baſes BAE, DEA ſunt æquales,

a *poſt. 1. huius.*
b *pr. 23. 24. ibid.*
c *pr. 26. l. 1.*

les, cùm parallelogrammum DB à diametro AE bifariam ſecetur, & altitudo earum eſt eadem, ſcilicet eadem perpendicularis à communi vertice C ad planum DB ducta: Pari ratione duæ pyramides EDAC, & EDFC habent baſes æquales DAC, & DFC & eandem altitudinem, ſcilicet perpendicularém à vertice E ad planum FDAC ductam; Ergo *d* pyramis EDFC æqualis eſt eidem pyramidi EDAC: ideoque tres pyramides, in quibus priſma reſoluitur æquales inter ſe ſunt; & propterea priſma DBF triplum erit pyramidis EABC: Eſt verò *e* pyramis KGHM æqualis pyramidi EABC (cum eorum baſes GHM & ABC ſint poſitæ æquales, & etiam altitudines æquales). Ergo pyramis KGHM tertia pars eſt priſmatis DBF. *d pr. 23 et 24. huius.* *e pr. 23 24. hu.*

Secundò in priſmate polygonio diuidantur *f* baſes polygonæ parallelæ, æquales, & ſimiles AC, & DF in totidem triangula, ita vt duo quælibet oppoſita ſimilia parallela & æqualia ſint, vt ABP ſimile & æquale ſit ipſi DES, PBO ipſi SER, &c. & *g* ductis planis per latera homologa æqualia, & parallela PB, SE, & per OB & RE diuiſum erit priſma DBF in totidem priſmata triangularia, quot ſunt triangula ABP, PBO, OBC in baſi AC. Et ſi ad verticem E ducantur plana *f ex pr. 17. l. 4.* *g poſt. 1 huius.*

per

per rectas AP, PO, OC, PB, OB, erit pyramis EAC polygonia diuiſa in totidem pyramides triangulares; quot ſunt triangula in baſi AC; & propterea tot erunt pyramides triangulares EABP, EPBO, EOBC quot ſunt priſmata triangularia DBS, SBR, RBF, & erunt priſmata, & pyramides deſcriptæ ſuper eaſdem baſes triangulares, & in eiſdem altitudinibus. Vnde (ex prima parte huius) pyramis triangularis EABP tertia pars erit priſmatis triangularis DBS, pariterque pyramis EPBO erit tertia pars ipſius priſmatis SBR, nec non pyramis EOBC ipſius priſmatis RBF tertia pars erit; ideoque tota pyramis polygoni EAC totius priſmatis polygoni DBF tertia pars erit: Sed *h* pyramis KGHM æqualis eſt pyramidi EAC (quia baſes AC, & GHMN æquales poſitæ ſunt, & eorum altitudines æquales). Ergo pyramis KGHM tertia pars eſt priſmatis DBF. Tandem ſi fuerint duo priſmata æquè alta ſuper æquales baſes ex hac propoſitione, quodlibet eorum triplum erit eiuſdem pyramidis æquè altæ ſuper eadem baſi deſcriptæ ergo priſmatà æqualia erunt inter ſe. Quod erat, &c.

*h pr. 25. huius et ex prop. 10. l. 3.*

EVCL. 10. XII.

PROPOSITIO XXIX. *Si coni, & cylindri baſes, & altitudines æquales*

*les inter ſe fuerint, erit conus tertia pars cylindri; Et duo quilibet cylindri baſes & altitudines æquales habentes, ſunt æquales interſe.* Tabula VII. Fig. 18.

Sit conus EA, & cylindrus CB, ſiue recti ſiue non, quorum baſes circuli A, B ſint æquales, pariterque eorum altitudines æquales ſint inter ſe. Dico conum EA tertiam partem eſſe cylindri CB. Adſcribantur *a* cono EA duæ pyramides EDFG & EHIK, quarum differentia à cono minor ſit quacunque data magnitudine: & circulo B adſcribantur *b* duo polygona OPQ & RVS ſimilia regularibus polygonis DFG & HIK. Patet *c* circunſcripta polygona DFG, OPQ æqualia eſſe, eo quod ſunt inter ſe vt quadrata radiorum, ſeu vt circuli æquales A, B, eadem ratione æqualia erunt inſcripta polygona HIK & RSV. Poſtea latera cylindri SLQM transferantur tranſuerſè ſemper ſibi ipſis æqui diſtanter per omnia latera polygonorum RSV & NOPQ inter plana parallela circulorum C & B quouſque compleantur priſmata; quæ æquè alta erunt, ac conus AE & cylinder BC; & illorum plana lateralia quæ per circulum tangentes NOPQ ducuntur *d* tangent cylindri ſuperficiem & ideo priſma circumſcriptum & maius erit cylindro CB;

&

*a prop. 26. hu.*

*b ex pr. 4. l. 5.*

*c pr. 10. 12. l. 5. et ex pr. 16. l. 3.*

*d prop. 19. hu.*

& plana lateralia quæ per circulum ſecantes RSV ducuntur cylindrum BC ſecabunt & ideo priſma RSVL inſcriptum &minus erit cylindro BC

Iam quoniam ſunt duæ magnitudines prima conus EA, ſecunda cylindrus CB, & ratio data ſubtripla, & pyramis EFGD conſcripta, & maior ipſo cono exceſſu minori quacunque magnitudine propoſita, ad priſma MOPQ quod circũſcriptũ, & maius eſt cylindro CB, eandem rationem datam ſubtriplam e habet
e pr. 28. huius.
( eo quod altitudines, & baſes æquales inter ſe habent ) ideoque pyramis EFGD maior eſt quam ſubtripla cylindri CB. Et rurſus pyramis EHIK inſcripta, & minor cono EA defectu minore quacunque magnitudine propoſita, ad priſma RVSL inſcriptum, & minus cylindro CB eandem rationem datam f
f pr. 28. huius.
ſubtriplam habet, ideoque pyramis EHIK minor eſt parte tertia cylindri CB: Ergo g prima ad ſecundam,
g ex pr. 24. l. 3.
ideſt conus EA ad cylindrum CB erit in ratione data ſubtripla. Eſt ergo conus EA tertia pars cylindri CB. Tandem ſi fuerint duo cylindri æquè alti ſuper æquales baſes conſtituti, ex hac propoſitione, quilibet eorum triplus erit coni eiuſdem æquè alti ſuper eadem baſi deſcripti. Quare cylindri æquales erunt inter ſe, vt propoſitum fuerat.

PRO-

PROPOSITIO XXX. *Si prisma, aut cylindrus secetur plano aduerſis baſibus parallelo; erunt priſmata, vel cylindri ſecti inter ſe, vt eorum latera, & vt eorum altitudines.* Tabula VII. Figura 19. EVCL. 25. XI. 13.14. XII.

Sit priſma, vel cylindrus DA, cuius latus AD, & altitudo CE, & ſectum ſit plano G parallelo baſibus aduerſis A, D, à quo ſecetur altitudo CE in I & latus AD in G. Dico ſolidum AG ad ſolidum DG eandem rationem habere, quam habet altitudo CI ad altitudinem IE, & quam latus AG habet ad latus GD, ſi tamen comparentur ea, quæ eiuſdem ſunt ſpeciei, ſcilicet priſmata inter ſe, & cylindri inter ſe. Secetur *a* altitudo IE in quotcunque partes æquales IB, BX, X E, & *b* in recta I C producta ſecentur quotcunque partes I M, MP, PS ſingulæ æquales XE, ita vt *c* recta IS ſit quælibet partes ipſius IE. Poſtea *d* per puncta S, P, M, B, X plana ducantur parallela baſibus D & G, tam in cylindro, quam in priſmate. Et quoniam priſma vel cylindrus A D ſecatur planis Q, N, K, G, Z, T baſibus parallelis: Ergo *e* figuræ Q, N, K, G, Z, T ſimiles, & æquales ſunt figuræ D, & inter ſe, & ſunt altitudines E X, XB, BI, IM, MP, PS æquales inter ſe: Ergo *f* omnia priſmata in-

a pr. 28. l. 1.
b prop. 3. lib. 1.
c Def. 3 lib. 3.
d ex pr. 10. hu.
e pr. 17. huius.
f pr. 28 29. hu.

ter:

ter ſe; vel omnes cylindri QN, NK, KG, GZ, ZT, TD æquales erunt inter ſe, & tot numero ſunt, quot ſunt æquales altitudines SP, PM, MI, IB, BX, XE: Ergo *g* eędem partes erit priſma, vel cylindrus QG ipſius priſmatis, vel cylindri GD, ac eſt partes altitudo SI ipſius IE. Et quoniam ſunt quatuor quantitates, prima altitudo CI, ſecunda altitudo IE, tertia priſma, vel cylindrus AG, & quarta priſma, vel cylindrus DG, & duæ aliæ quantitates altitudo SI & priſma vel cylindrus QG, quæ *h* eandem, & quamlibet rationem commenſurabilem habent ad conſequentes; nam quælibet partes eædem ſunt, SI quidem ipſius ſecundæ IE, & ſolidum QG ipſius quartæ ſolidi GD (comparando ſemper priſmata inter ſe, & cylindros inter ſe): Et quotieſcunque SI æqualis eſt primæ CI, *i* neceſſariò ſolidum QG æquale eſt ſolido AG (quoniam eandem baſim G, & æquales altitudines habent *perpendiculares* à puncto C ad *planum* G) & quoties SI maior fuerit, quàm CI, *l* neceſſariò ſolidum QG maius erit ſolido GA, & quotieſcunque SI minor fuerit, quàm CI, neceſſariò ſolidum QG minus erit ſolido GA: Ergo *m* prima quantitas CI ad ſecundam IE eandem rationem habebit, quam tertia, quæ eſt ſolidum

*g def. 6. lib. 3.*

*h def. 8 lib. 3.*

*i pr. 28. 29. hu.*

*l ex pr. 28 29. huius.*

*m prop. 23. l. 3.*

AG

AG ad quartam, ſcilicet ad ſoli dum GD. Quare vt altitudo CI ad altitudinem IE, ita erit priſma AG ad priſma GD, vel cylindrus AG ad cylindrum GD. Tandem quoniam duæ rectæ linæ CE & AD ſecantur à planis D, G & A parallelis inter ſe: Ergo *n* vt CI ad IE, ita AG ad GD. Quare vt ſolidum AG ad ſolidum GD, ita eſt illius latus AG ad huius latus GD. Quapropter. &c. *n pr. 17. huius.*

PROPOSITIO XXXI. *Qualibet duo priſmata, cylindri, pyramides, aut coni proportionem habent compoſitam ex rationibus baſium, & altitudinum.* Tabula VII. Fig. 20. 21.

Sint duo priſmata, vel cylindri, aut pyramides, vel certè duo coni AB, CD, quorum baſes B, D, & altitudines ſint FE, GO. Dico ſolida eiuſdem ſpeciei, ſcilicet priſmata inter ſe, & cylindros inter ſe, atque pyramides inter ſe, nec non conos habere proportionem compoſitam, ex ratione baſis B ad baſim D, & ex ratione altitudinis FE ad altitudinem GO. Et ſi quidem AB, CD fuerint pyramides, aut coni, fiant *a* ſuper eiſdem baſ bus, & in eiſdem altitudinibus priſmata, aut cylindri AB, CD, & è contra, ſi fuerint priſmata aut cylindri, fiant *b* ſuper eiſdem baſibus, & in eiſdem altitudi- *a def. 13. 14. 14. 2. h. b def. 2. ſecunda hu.*

di-

dinibus pyramides, aut coni AB, C
*c pr.3.* D; poſtea *c* ſecetur altitudo IO æ-
*lib. 1.* qualis altitudini FE, & ducatur *d*
*d ex pr.* planum IH parallelum baſi D, effi-
*10.hu.* ciens *e* figuram H æqualem, & ſimi-
*e.pr.17.* lem baſi D, vt ſit HD priſma, *f* vel
*huius.* cylindrus; vel certè punctum aliquod
*f def.13* H ſtat vertex pyramidis, aut coni
*14.1.2. ſecund. huius.* HD. Et quia duæ pyramides, aut duo
coni AB, HD æquales altitudines *ha-*
*g pr.25* bent. Ergo *g* ſunt inter ſe, vt baſes B
*27.hu.* D: ſed tam pyramides, quàm coni æ-
què metiuntur priſmata, & cylin-
*h pr.28* dros AB, HD, cùm *h* quodlibet ſo-
*29.hu.* lidum correſpondentis ſolidi eiuſ-
*i pr.11.* dem ſpeciei tertia pars ſit: Igitur *i*
*et 7.l.3* priſma, aut cylindrus AB ad ipſum
HD habet eandem proportionem,
quam baſis B ad baſim D. Poſtea
quia priſma, vel cylindrus CD ſe-
catur plano H aduerſis baſibus pa-
*l pr.30.* rallelo: Ergo priſmata *l* HD & C
*huius.* D, aut cylindri inter ſe ſunt, vt al-
titudines IO, GO; ſed tam priſma-
ta, quam cylindri æquè multiplices
ſunt pyramidum, vel conorum H
*m pr.28* D, CD, cum *m* quodlibet ſolidum
*29.hu.* correſpondentis eiuſdem ſpeciei ſo-
*n pr.11.* lidi triplum ſit: igitur *n* pyramis,
*et 7.l.3.* vel conus HD ad eiuſdem ſpeciei
ſolidum CD eandem proportionem
habet, quam altitudo IO ad altitu-
*o pr.19* dinem GO: eſt verò *o* proportio
*lib. 3.* ſolidi AB ad ſolidum CD compoſi-
ta ex rationibus intermedijs, ſcili-

cet

cet ex ratione ſolidi AB ad HD, & ex ratione HD ad CD (comparando ſemper ea, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt); atque eſt ſolidum AB ad HD, vt baſis B ad D, & ſolidum HD ad CD eſt, vt altitudo IO, vel *p* ei æqualis FE ad altitudinem GO: Ergo *q* ſolidum AB ad eiuſdem ſpeciei ſolidum CD habet proportionem compoſitam ex ratione baſis B ad baſim D, & ex ratione altitudinis FE ad altitudinem GO. Quod erat oſtendendum.

*p pr. 1. lib. 3.*

*q pr. 19. lib. 3.*

*Corollarium* Patet, quod priſmata, & cylindri æqualium altitudinum, ſunt inter ſe, vt baſes: & pyramides: aut coni æqualium baſium ſunt inter ſe, vt altitudines. Oſtenſa enim fuit proportio priſmatum, vel cylindrorum AB, HD æqualium altitudinum eadem, ac eſt proportio baſium B, D; atque proportio pyramidum HD & CD habentium æquales baſes eadem fuit ac habent altitudines IO & GO.

EVCL. 32. XI. *et* 11.14 XII.

PROPOSITIO XXXII. *Aequalium piramidum, conorum, priſmatum, cylindrorum, reciprocantur baſes, & altitudines; & quorum baſes, & altitudines reciprocantur, æquales ſunt inter ſe*: Tab. VII. Fig. 22.23.

EVCL. 34. XI. 9.15. XII.

Sint primò æquales inter ſe duæ

pyra-

pyramides, vel coni, aut priſmata; aut cylindri AB & CD, quorum baſes B, D, & altitudines AE, CF. Dico, vt baſis B ad D, ita eſſe reciprocè altitudinem CF ad altitudinem AE. Sint duæ quælibet figuræ M & N æquales inter ſe, & vt B ad D, ita ſit M ad O. Et quoniam ſicut M æqualis eſt N, ita ſolida AB & CD æqualia ſunt inter ſe (dummodo ſemper ea comparentur, quæ eiuſdem generis ſunt); & æqualitatis proportio *a* ſolidi AB ad ſolidum CD componitur ex rationibus baſis B ad baſim D, & altitudinis AE ad altitudinem CF; Eſt verò M ad O, vt B ad D: *b* Ergo reſidua proportio O ad N eadem eſt, quæ altitudinis AE ad altitudinem CF; & *c* inuertendo N ad O eſt, vt CF ad AE; ſed *d* N ad O eſt, vt M ad O (eo quod M & N æquales ſunt): Ergo *e* altitudo CF ad altitudinem AE eandem rationem habet, quam baſis B ad baſim D.

*a pr. 31 huius.* *b pr. 21 lib. 3.* *c pr. 9. lib. 3.* *d prop. 3. lib. 3.* *e prop. 7. lib. 3.*

Secundò in omnibus dictis ſolidis (comparando ſemper ea, quæ eiuſdem ſunt ſpeciei) ſit baſis B ad D reciprocè vt altitudo CF ad altitudinem AE. Dico ſolida ipſa æqualia eſſe inter ſe. Quoniam *f* æquales M & N ad eandem O eandem rationem habent, & eſt B ad D, vt M ad O & CF ad AE eſt, vt B ad D, ſeu, vt M ad O: Ergo CF ad

*f pr. 3. lib. 3.*

g AE

AE eſt vt N ad O, & inuertendo *g prop.*
E *h* ad CF eſt, vt O ad N; ſed *i* *7 lib. 3.*
roportio M ad N componitur ex *h pr. 9.*
tionibus M ad O & O ad N: Er- *lib. 3.* *i prop.*
o proportio M ad N componitur *19. l. 3.*
x rationibus B ad D & AE ad CF.
ſt verò proportio *l* ſolidi AB ad *l pr. 31.*
lidum CD compoſita ex iiſdem *huius.*
tionibus baſis B ad baſim D, &
titudinis AE ad altitudinem CF:
rgo *m* vt M ad N, ita eſt ſolidum *m prop.*
B ad ſolidum CD; ſed erat M *19 lib. 3*
qualis N. Ergo ſolidum AB æ-
uale eſt ſolido CD. Quod erat,
&c.

ROPOSITIO XXXIII. *Si fuerint duæ pyramides, vel duo priſmata, quorum baſes ſint triangula, vel parallelogramma, & habeant vnum angulum ſolidum contentum à media trium proportionalium æqualem angulo ſolido contento à tribus proportionalibus: erunt ſolida, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt, æqualia inter ſe.* Tab. VII. Figura 24. EVCL. 36. XI.

Sint anguli ſolidi B & E æquales inter ſe, & angulus B contineatur à tribus rectis proportionalibus AB, CB, DB, & angulus E contineatur à tribus FE, GE, HE æqualibus mediæ CB trium proportionalium, & compleantur triangula ABD, FEH, atque parallelogramma KB, ME. Dico primò pyramides, qua-

rum

rum vertices C & G, baſes verò *tri*angula ABD & FEH, vel *paralle*logramma KB & ME æquales *eſſe* inter ſe. A terminis *a* C, G ſublimium æqualium BC & EG *homo*logarum cadant perpendiculares C N GO ad ſubiecta plana: Erunt perpendiculares CN, & GO æquales inter ſe eo quod ſi intellectu aptè applicetur angulus ſolidus B *ſuper* E congruet angulus planus ABD ſuper angulum FEH; & ſic quoque reliqui anguli plani. Quare ſublimis CB cadet ſuper GE, & ob earum æqualitatem ſibi mutuo congruent, & conuenient puncta C, G igitur CN, GO perpendiculares ad congruentia ſubiecta plana, & conuenientes in vno puncto C, vel G, ſibi mutuo congruent, & ideo æquales erunt. Et quoniam anguli ABD & FEH æquales ſunt inter ſe, & eſt AB ad FE, ita reciprocè HE ad DB: Ergo *b* triangula ABD & FEH æqualia ſunt inter ſe, pariterque parallelogramma *KB & ME* æqualia erunt inter ſe, & altitudines CN, GO etiam æquales: erunt pyramides *c* CABD & GFHE inter ſe pariterque pyramides CBK, GME. æquales.

*a pr. 6. huius.*

*b prop. 14. l. 4.*

*d pr. 23 24. hu.*

Secundò ijſdem poſitis. Dico priſmata, quorum latera CB, GE, & baſes triangula ABD & FEH, vel parallelogramma KB & ME eſſe æqua-

æqualia inter ſe. Quoniam prædicta priſmata altitudines habent æquales ipſis CN & GO æqualibus; ideoque æquè alta erunt, & baſes ABD & FEH æquales ſunt, nec non baſes KB & ME. Ergo f prædicta priſmata æqualia inter ſe erunt. Quod erat, &c.

f prop. 29. hu.

PROPOSITIO XXXIV. *Si hemiſphærium, & conus rectus, æquales axes, & baſes habentes, ſecentur planis parallelis baſibus, & æquè remotis à centro ſphæræ & vertice coni, & ſuper ſectionibus, & ſuper circulo baſis coni, vel hemiſphærij ſolida æquè alta deſcribantur: ſectiones genitæ circulares ſimul ſumptæ æquales erunt circulo baſis hemiſphærij, vel coni; & ſolida ipſa erunt cylindri æquales cylindro ſuper circulo baſis coni, vel hemiſphærij deſcripto eiuſdem altitudinis.* Tabua VII. Fig. 25.

Sit hemiſpherium BCD, & conus rectus FGH, quorum circuli baſium A & E ſint æquales, & axes AB & EF perpendiculares ad plana circulorum A, E, ſint etiam æquales, & per puncta M & O æquè remota à centro ſphæræ A, & à vertice coni F ducantur plana KL & PQ parallela baſibus A & E. Dico primò figuras PQ & KL ſimul ſũptas equales eſſe circulo A. Et patet ſectioně coni PQ parallelam plano circuli

O baſis

*a prop. 16. hu.* baſis E *a* eſſe circulum. At in ſphæra quia axis BA perpendicularis eſt ad vnum planorum æquidiſtantium CD *b* erit quoq; perpendicularis ad *b prop. 9. huius* reliquum KL; & ideo *c* anguli AM *c prop. 2. huius* K, AMN recti erunt, & reliqui acuti in triangulis AMK, AMN, in quibus latera AK, AN ſunt æqua- *d pr. 16 lib. 4.* lia (cum ſint radij ſphæræ) & latus *d prop. 8. l. 4. & ex 16. l. 3.* AM eſt commune. Ergo triangula erunt ſimilia, & ideo *d* latera KM, NM æqualia erunt, & omnes aliæ rectæ à puncto M eductæ in figura KMN. Quare talis figura erit circulus. Et quoniam *e* in triangulo *e prop. 18. l. 5.* rectangulo AMK duo circuli à radijs KM & MA deſcripti æquales ſunt circulo à radio KA deſcripto; æſtque circulus A, vel E æqualis circulo radij KA, eo quod rectæ AK, AC, EG æquales ſunt, atque circulus radij AM æqualis eſt circulo PQ radij FO, ſeu radij PO ei æquali (eo quod triangulum POF ſimile eſt iſoſcelio GEF). Igitur circulus A, vel E æqualis eſt duobus circulis KL, & PQ ſimul ſumptis.

Secundo ſuper circulos A, E, PQ & KL deſcribantur cylindri æquæ alti CXD, ZGH, VPQ & RKL. Dico cylindrum XCD, vel ZGH æqualem eſſe duobus cylindris RKL & VPQ ſimul ſumptis. Nam altitudines XC, vel ZG & RK, VP

æqua-

æquales ſactæ ſunt: Ergo *f* cylindri XCD, RKL, VPQ erunt vt baſes; & eſt baſis circulus A, vel E æqualis duobus circulis KL & PQ ſimul ſumptis. Igitur *g* cylindrus XCD, vel ZGH æqualis eſt duobus cylindris RKL & VPQ ſimul ſumptis, vt propoſitum fuerat.

*f ex pr. 31. hu.*

*g ex pr. 22. et ex pr. 16. lib. 3.*

PROPOSITIO XXXV. *Si hemiſphærium, conus rectus, & cylindrus æquales axes, & baſes habuerint, poſſunt adſcribi hemiſphærio, & cono figuræ gradatæ ex cylindris æquè altis compoſitæ, ita vt circunſcriptæ, ſimul ſumptæ, maiores ſint dato cylindro exceſſu minore quocunque dato; & duæ inſcriptæ, ſimul ſumptæ, minores ſint dato cylindro defectu minore quocunque dato.* Tabula VII. Figura 26.

Sit hemiſphærium ABC, conus rectus DEF, & cylindrus IHKR, quorum baſes A, G, D ſint circuli æquales, & altitudines perpendiculares AC, DF, IH ſint æquales inter ſe. Debent adſcribi, imperatæ figuræ. Secetur *a* latus IH cylindri bifariam in M, ducaturque *b* planum MN parallelum baſi G. Manifeſtum eſt *c* cylindrum IMN dimidium eſſe totius cylindri IHK; & ſi rurſus latus IM bifariam ſecetur in O, ducaturque planum per O parallelum baſi G: ſimiliter erit cylin-

*a prop. 9. l. 1.*

*b ex pr. 10. hu.*

*c prop. 29. hu.*

drus RIO dimidium cylindri IMN ;
& ſi hæc bipartitio,& productio pla-
norum æquidiſtantiũ baſi G ſemper
*d ex pr.* repetatur *d* relinquentur tandẽ cylin-
*27. l.2.* drus aliquis,qui minor erit quacunq;
magnitudine propoſita. Ponatur igi-
tur poſtremus cylindrus RIO minor
*e prop.9* quacunque magnitudine data. Et *e*
*lib. 1.* MH bifariam ſecetur in Q, duca-
*et ex pr.* turque planum parallelum baſi &
*10.hu.* addatur in directum cylindrus PIR
æqualis cylindro RIO ; ſeceturque
*f prop.* *f* tam altitudo AC, quàm DF in
*28. l.1.* tot partes æquales in punctis S, T,
V, X, Z, Y, in quot ſecta fuit *IH*.
*g prop.* Patet *g* partes AV, FY æquales eſſe
*1. l. 3.* cuilibet QH, & inter ſe ( eò quod
æquè multiplices earum AC, DF
& IH æquales ſunt inter ſe). Ea-
dem ratione reliquæ partes VT, TS,
SC, YZ, ZX, XD, QM, MO, OI,
IP æquales inter ſe erunt. Deinde
*h* per puncta diuiſionum ducantur
*h ex pr.* plana parallela baſibus A & D, quæ
*10.hu.&* *i* circulos efficient tam in hemiſphe-
*i prop.* rio, quàm in cono, quorum circu-
*34.hu.* lorum radij ſunt Sα, Tβ, Vλ, Xι,
*l def.19* Zθ, Yπ : & *l* ſuper circulo radij Sα
*2. hu.* deſcribantur duo cylindri recti,
quorum altitudines SC & ST, eo-
rumque ſemiſectiones per axim ſint
parallelogramma rectangula Cα,
Tα : eſtque parallelogrammum Cα
*m prop.* circunſcriptum ſegmento SCα cir-
*11. l.2.* culi maximi BC, eo *m* quod contin-
gens

gens à puncto C cadit; extra circulũ BC; parallelogrãmũ verò Tα inſcriptum eſt fruſto SαβT eiuſdẽ circuli, cùm n latus oppoſitũ, & æquale ipſi Sα minus ſit, quàm Tβ, eo quod Tβ minùs diſtat à centro A circuli BC, quàm Sα. Et quia altitudines SC, ST æquales ſunt, & baſis communis, o cylindrus circunſcriptus ſegmento ſphæræ, cuius ſemiſectio per axim eſt Cα, erit æqualis cylindro inſcripto, cuius ſemiſectio eſt Tα. Eodem modo ſuper reliquos circulos radiorum Tβ, Vλ, Xι, Zθ, Yπ deſcribantur bini cylindri, quorum vnus extra ſolidum cadens æqualis erit reliquo intra ipſum cadenti, eo quod ſunt omnes æquè alti, & bini quilibet communem baſim habent. Vnde vniuerſa figura gradata, ex cylindris æquè altis compoſita, cuius ſemiſectio per axim SαβλA, quæ eſt in ſcripta hemiſphærio, æqualis erit figuræ gradatæ circunſcriptæ abſque infimo cylindro, cuius ſemiſectio per axim CαβλV. Similiter figura gradata ex cylindris æquè altis compoſita, cuius ſemiſectio per axim DιθλY inſcripta cono æqualis oſtendetur figuræ gradatæ circunſcriptæ abſq; infimo cylindro, cuius ſemiſectio per axim XιθπF. Quapropter binæ figuræ gradatæ inſcriptæ hemiſphærio, & cono, ſimul ſumptæ, æquales erunt

n pr. 26 lib. 1. et pr. 11 l. 2.

o ex pr. 29. lun.

duabus figuris gradatis circunſcri-
tis hemiſphærio, & cono abſque
duobus infimis cylindris, quorum
ſemiſectiones VB & XE. Et qu-
niam puncta V, Y æquè recedunt
centro ſphæræ A, & à vertice co-
p pr. 34 huius. F recti cylindri p æquè alti, quo-
rum ſemiſectiones per axim paral-
lelogramma Aλ, & Zπ, ſimul ſum-
pti, æquales erunt cylindro QHK
propterea quod altitudines æquales
ſunt, & circulus baſis G æqualis eſt
duabus baſibus à radijs Vλ, & Yπ
deſcriptis. Eadem ratione duo cy-
lindri, quorum ſemiſectiones Vβ,
& Xθ æquales erunt cylindro QM
N; & duo cylindri quorum ſemiſe-
ctiones Tα, Dε æquales erunt cy-
lindro OMN. Quare duæ figuræ
gradatæ inſcriptæ hemiſpherio, &
cono, quarum ſemiſectiones Aλβα S
& Yπθε D ſimul ſumptæ, æquales
erunt cylindro OHK; ſed eiſdem
figuris inſcriptis æquales erant duæ
figuræ gradatæ circunſcriptæ hemi-
ſphærio, & cono abſque infimis cy-
lindris, quorum ſemiſectiones Cα
βλV & Xεθπ F. Ergo duæ figuræ
gradatæ circunſcriptæ hemiſphærio,
& cono abſque infimis cylindris, æ-
quales erunt cylindro OHK. At q
q ex pr. 29 hu. infimus cylindrus circa ſphæram,
cuius ſemiſectio BV, æqualis eſt cy-
lindro OIR, propterea quod baſes,
& altitudines æquales ſunt: pariter-

que

que infimus cylindrus circa conum, cuius ſemiſectio EX æqualis eſt cylindro PIR: Igitur duæ figuræ gradatæ circunſcriptæ hemiſphærio, & cono, quarum ſemiſectiones CaBA, & DEbF, ſimul ſumptæ æquales erunt cylindro PHK; eſtque cylindrus PIR exceſſus cylindri PHK ſupra cylindrum IHK, atque cylindrus PIR minor erat quacunque data magnitudine. Igitur duæ figuræ gradatæ circunſcriptæ hemiſphærio ABC, & cono DEF, ſimul ſumptæ, ſuperant cylindrum datum IHK exceſſu minore quacunque data magnitudine; Et duæ figuræ gradatæ inſcriptæ hemiſphærio ABC, & cono DEF, quæ æquales erant cylindro OHK, deficiunt à cylindro IHK defectu OIR minore quacunque data magnitudine. Quod fieri poſſe oſtendendum erat.

PROPOSITIO XXXVI. *Sphæra quadrupla eſt coni recti, & ſexquitertia cylindri cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, axis verò æqualis radio ſphæræ.* Tab. VII. Fig. 27.

*Arch. de sphe et cyl. l. 1. p. 32*

Sit ſphæra ABCD, cuius circulus maximus per centrum E ductus ſit AC, & conus FHG & cylindrus NKLO, ſinguli quorũ baſes M, & Q ſint æquales circulo E, & axes MG BE, QR ſint æquales, & perpendi-

culares ad plana baſium Q, E & M. Dico ſphæram ABCD quadruplam eſſe coni recti FHG & ſexquitertiam eſſe cylindri NKL b deſcribantur circa hemiſphærium ABC, & circa conum FHG duæ figuræ gradatæ ex cylindris æquè altis compoſitæ, quarum ſemiſectiones per axim ſint R & S, ita vt, ſimul ſumptæ, maiores ſint cylindro NKLO exceſſu INO minori quacunque data magnitudine: pariterque hemiſphærio, & cono inſcribantur duæ figuræ, quarum ſemiſectiones X & Z, quæ minores ſint cylindro NKLO defectu PNO minori quacunque data magnitudine. Et quoniam ſunt duæ magnitudines, prima cylindrus NKLO, ſecunda eſt hemiſphærium ABC, vna cum cono FGH, & duæ aliæ magnitudines in ratione æqualitatis, ſcilicet cylindrus IKL, & duæ figuræ gradatæ, ſimul ſumptæ, quarum ſemiſectiones R & S quæ ſunt vnà maiores prima, & ſecunda, (nam figuræ gradatæ circunſcriptæ, quarum ſemiſectiones R & S maiores ſunt hemiſphærio vnà cum cono), & cylindrus IKL maior eſt cylindro NKLO exceſſu INO minore quacunque data magnitudine: pariterque ſunt duæ aliæ magnitudines ſcilicet cylindrus PKL, qui æqualis eſt duabus figuris gradatis inſcriptis, quarum ſemiſectiones

b pr. 35 huius.

X & Z, & ſunt vnà minores prima, & ſecunda; eſtque defectus cylindri PKL à prima, ſcilicet à cilindro N KLO minor quacunque magnitudine data: Ergo *c* prima ad ſecundam, ideſt cylindrus NKLO ad hemiſphæriumABC vnà cum cono FGH eandem rationem æqualitatis habet. Eſtque *d* cylindrus NKLO triplus coni FHG æqualem baſim, & altitudinem cum illo habentis: Igitur *e* hemiſphærium ABC vnà cum cono FGH ad conum EGH triplam proportionem habet ſ. Et *f* diuidendo hemiſphærium ABC ad conum FG H duplam proportionem habebit: Eſtque ſphæra ABCD dupla hemiſphærij ABC: Ergo ſphæra ABCD quadrupla eſt coni FGH. Et conus FGH tertia pars eſt cylindri NKL. Igitur ſphæra ABCD ad cylindrum NKL ſe habet vt quatuor ad tria vt erat &c.

*c ex prã 24. l. 3.*

*d prop. 29. hu.*

*e prop. 3. lib. 3.*

*f pr. 13. lib. 3.*

PROPOSITIO XXXVII. *Pyramides, priſmata coni, cylindri ſimiles, & ſphæræ in triplicata ſunt ratione homologorum laterum, vel ſuorum axium* Tabula VII. Figura 28. 29. 30 31.

EVCL. 33. XI. 8. 12. 16 XII.

Sint duæ pyramides, aut priſmata, aut coni, aut cylindri ſimiles, aut duæ quælibet ſphæræ ABCD & FGHK, quarum latera homologa, ſeu axes AB & FG. Dico ſolidum ad ſimile ſolidum triplicatam

habere proportionem lateris, ſeu axis A B, ad latus, ſeu axim F G. Demittantur a à ſummitatibus ſolidorum ad plana baſium perpendiculares AM & FN, quæ altitudines eorum determinabunt. Et ex latere homologo FG ſecto F E æquali AB, & ducto b plano EO I parallelo baſi GHO, erit c pyramis vel priſma ſectum FEOI æquale & ſimile ipſi ABDC, & latus F E ſeu ei æquale AB ad FG eandem rationem habebit quam altitudo F S ſeu ei æqualis A M ad altitudinem FN: Cumque propter ſimilitudinem triangulorum, vel parallelogrammorum CBA, KGF ſit, vt A B ad BC, ita FG ad GK: Ergo d permutando vt AB ad FG, ſeu, e vt altitudo AM ad altitudinem FN, ita eſt BC ad GK. In conis verò, & cylindris, quoniam f propter ſimilitudinem ſolidorum, vt axis AB ad axim FG, ita eſt diameter CD circuli baſis ad diametrum HK, ſeu g radius BD, ad radium HG, & anguli ABD & FGK æquales ſunt: pariterque anguli ad M & N recti: Ergo h triangula ABM & FGN ſimilia ſunt; Quare vt i axis AB ad axim FG, ita eſt AM, altitudo eiuſdem ſolidi, ad FN altitudinem alterius ſolidi. Patet ergo, quòd in omnibus prædictis ſolidis ſimilibus, vt eſt latus, vel axis AB ad latus, ſeu

*a prop. 6. hu.* *b pr. 9. huius.* *c prop. 16. hu.* *d prop. 10. l. 3.* *e prop. 7. lib. 3.* *f def. 22. 2. hu.* *g pr. 11. lib. 3.* *h ex pr. 4. l. 4.* *i pr. 4. lib. 4.*

ſeu axim FG, ita eſt altitudo AM ad altitudinem FN; & ita pariter eſt BD ad GH, quæ ſunt latera homologa polygonorum baſium, vel ſemidiametri circulorum baſium BD & GK dictorum ſolidorum & quoniam *l* ſolida, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt, ideſt coni inter ſe comparati, &c. proportionem habent inter ſe compoſitam ex proportione baſium BCD & GKH, & ex ratione altitudinum AM & FN: Eſt verò *m* proportio duplicata lateris, ſeu ſemidiametri CB ad latus, ſeu ſemidiametrum GK eadem, quæ baſis BCD ad ei ſimilem baſim GKH; ſed vt CB ad GK, ita eſt AB ad FG: Ergo *n* proportio duplicata lateris, ſeu axis AB ad latus, ſeu axim FG, eadem eſt, quæ baſis BDC ad baſim GHK; Poſtea ſimpla proportio AB ad FG eadem eſt, quæ altitudinis AM ad altitudinem FN: Ergo proportio ſolidi ABCD ad ſolidum FGHK componitur ex duplicata proportione, & rurſus ex ſimpla ipſius AB ad FG; Hæc *o* verò triplicata proportio eſt lateris, vel axis AB ad FG. Quare ſolida ſimilia ABCD & FGHK triplicatam proportionem habent laterum homologorum, ſiue axium AB ad FG.

*l* prop. 31. huius.

*m* prop. 17. lib. 4. et prop. 12 l. 5.

*n* prop. 7. l. 3.

*o* prop. 19. l. 3.

In ſphæris autem ACBD & FHGK intelligantur circunſcripti cylindri recti ML & NO, quorum ba-

ſes MP & NR æquales ſint maximo ſphæræ circulo, & altitudines LP & OR æquales diametro eiuſdem ſphæræ. Et quoniam cylindri ML & NO ſimiles ſunt, (eo quod ſunt recti, & eandem æqualitatis rationem habet axis *AB* ad axim FG, quam MP diameter circuli ſuæ baſis ad NR diametrum baſis alterius: Ergo *p* cylindrus ML ad cylindrum NO proportionem triplicatam habet axis AB ad axim FG; Eſt verò *q* cylindrus ML ſeſquialter ſphæræ ACBD; Pariterque cylindrus NO ſeſquialter ſphæræ FHGK: Ergo *r* permutando vt cylindrus ML ad cylindrum NO, ideſt *ſ* vt triplicata proportio axis AB ad axim FG, ita eſt ſphæra ABCD ad ſphæram FHGK. Quod erat oſtendendum.

*p part. prima huius.*

*q ex prop. 36. huius.*

*r prop. 12. l. 5*

*ſ parte prima huius.*

*Finis Libri ſexti.*

LI-

# LIBER VII.

## *De quinque corporibus regularibus.*

EVCL. XIII. & XIV.

## DEFINITIONES.

I. *CVIUSLIBET rectæ lineæ quadratum vocetur eius Potentia: Et proportio quadratorum quarunlibet linearum, vocetur earundem linearum proportio potentialis, vel in potentia.*

II. *SOLIDA figura in ſphæra inſcribi dicitur, & ſphæra circumſcribi figuræ ſolidæ, quando omnes anguli ſolidæ figuræ tangunt ſuperficiem ſphæræ.*

III. *SOLIDA figura ſphæræ circumſcribi dicitur, & ſphæra inſcribi dicitur in figura ſolida quando omnia plana figuræ ſolida tangunt ſuperficiem ſphæræ.*

PROPOSITIO I. *In data ſphæra figuram ſolidã ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contentam, inſcribere. Vocetur autem talis figura* Tetraedrum. Tabula VIII. Figura 1. EVCL. 13. XIII.

In ſphæra ABCD, cuius axis AC, circulus maximus ABCD, inſcribenda eſt figura imperata. Secetur *a* CE, quæ tertia pars ſit axis AC, & in plano circuli ABC ex E eleuetur E B *b* perpendicularis ad axim, & EO perpendicularis ad planum per AE

*a* pr. 28. lib. 1. *b* pr. 10. lib. 4.

B ex-

B extenſum; erit viciſſim AC per-
pendicularis ad ambas EB, EO; &
ideo c ad planum per eas ductum;
quod in ſphæra efficiet d circulum
BGDF, & e in eo inſcribatur tri-
angulum æquilaterum BGF, iun-
ganturque rectæ AB, AF & AG.
Oſtendendum eſt figuram ABFG
eſſe quæſitam. Quoniam f in ſemi-
circulo ABC, rectæ lineæ CA, A
B, AE proportionales ſunt; vt g re-
cta CA ad AE, ita erit quadratum
ex CA ad quadratum ex AB; & ita
erit quadratum ex BA ad quadra-
tum ex AE; ſed h vt recta AE ad E
C, ita eſt quadratum ex AE ad qua-
dratum ex EB. Igitur i ex compo-
ſitione ordinata erit, vt AC ad CE
tertiam partem eius, ita quadratum
AB ad quadratum EB; & l propte-
rea quadratum ipſius AB triplum
eſt quadrati ipſius EB; ſed m quadra-
tum ipſius FB, ſcilicet lateris tri-
anguli æquilateri, inſcripti circu-
lo BD, triplum eſt quadrati radij
eius EB. Ergo n quadrata rectarum
AB, & BF æqualia ſunt inter ſe;
& o propterea rectæ AB & BF æ-
quales erunt. Eadem ratione tam
recta AF, quàm AG æqualis erit
eidem FB, ſeu BG, vel FG; & pro-
pterea p quatuor triangula ABF, A
FG, AGB & BGF æquilatera e-
runt & inter ſe æqualia. Et hæc
comprehendunt ſolidam figuram q
deſ-

c pr. 2. et 4. lib. 6.
d pr. 34 lib. 6.
e pr. 2. lib. 5.
f ex pr. 10. l. 4.
g ex pr. 17. lib. 4.
h ex pr. 9. & pr. 17. l. 4.
i pr. 19. lib. 3.
l def. 8. lib. 3.
m p. 30. lib. 5.
n pr. 4. lib. 3.
o ex pr. 17. l. 4.
p pr. 1. et 4. l. 1
q def. 2 huius.

deſcriptam intra ſphæram ABCD, quod imperatum fuerat. Vocetur dicta figura ABFG *Tetraedrum*.

*Corollarium* Diameter ſphæræ poteſtate ſeſqui altera eſt lateris inſcripti tetraedri. Nam facta eſt CA ſeſquialtera ipſius AE, & vt CA ad AE; ita oſtenſum eſt in hac propoſitione quadratum ipſius CA ad quadratum AB lateris Tetraedri.

PROPOSITIO II. *In data ſphæra ſolidam figuram ſub octo triangulis æquilateris inter ſe æqualibus contentam inſcribere. Vocetur autem talis figura* Octaedrum. Tabula VIII. Figura 2. EVCL. 14. XIII.

Sit data ſphæra ABCD, cuius centrum E. Deſcribi debet intra eam figura imperata. Ducantur *a* tres diametri AC, BD, FG ad inuicem perpendiculares, & coniungantur rectæ AB, AF, AD, AG, CB, CF, CD & CG. Quoniam in tribus triangulis AEB, AEF, BEF communia latera EB, AE & BF ſunt æqualia, radij nimirum ſphæræ; Suntque anguli AEB, AEF & BEF æquales, cum radij AE, BE, FE ad inuicem perpendiculares ducti ſint. Igitur *b* iſoſcelium triangulorum baſes AB, AF, FB æquales ſunt inter ſe; & propterea *c* triangulum ABF æquilaterum erit. Si-

a pr. 10 lib. 2.

b pr. 4. et 5. li. 1.

c pr. 1. lib. 1.

mili ratione reliqua omnia triangula BAG, GAD, DAF, FCB, BCG, GCD, DCF æquilatera erunt; & d ſunt inter ſe æqualia, cùm bina quælibet triangula habeant latera communia. Igitur figura ſolida ABCDGF intra ſphæram deſcripta comprehenſa erit ſub octo triangulis æquilateris, & inter ſe æqualibus, & hoc erat faciendum. Vocetur huiuſmodi figura ſolida *Octaedrum*.

d pr. 4 lib. 1.

*Corollarium.* Conſtat ſphæræ diametrum poteſtate duplam eſſe; Et radium ſphæræ poteſtate ſemiſſem eſſe lateris octaedri.

Nam in quolibet triangulo ABC e rectangulo in ſemicirculo ABC, in quo duo latera AB, BC æqualia ſunt quadratum f hypothenuſæ, ſeu diametri ſphæræ AC duplum eſt quadrati lateris AB; & g quadratum radij EA, quod eſt quarta pars quadrati AC, erit ſemiſſis quadrati lateris AB.

e pr. 20 lib. 2.

f pr. 18. lib. 5.

g ex pr. 19. lib. 5.

PROPOSITIO III. *In data ſphæra ſolidam figuram inſcribere ſub ſex quadratis æqualibus contentam. Vocetur talis figura,* Cubus. Tabula VIII. Figura 3.

EVCL. 15. XIII.

Sit data ſphæra ABDF, cuius centrum G, axis AD. Debet in ea inſcribi figura imperata. Secetur

a recta

a recta GH, quæ media proportionalis ſit inter radium ſphæræ GA eiuſque partem tertiam: erit b eius quadratum tertia pars quadrati ex radio ſphæræ GA, & c fiat GO æqualis GH, atque per duo puncta H & O ducantur duo plana ad axim AD erecta, ſicuti in prima propoſitione huius factum eſt, quæ d efficient circulos BMF, CRE, & in illo e ducantur duæ diametri BF & MN ad inuicem perpendiculares, & in altero circulo ducatur f diameter CE parallela ipſi BF, atque ROS parallela ipſi MN, iunganturque rectæ BM, MF, FN, &c. Et quoniam iuncta recta GF in triangulo rectangulo FGH g quadratum radij FG, ſeu GA æquale eſt duobus quadratis FH & HG; & erat quadratum radij AG triplum quadrati ipſius GH: Ergo quadratum ipſius GF ſeu duo quadrata ipſarum FH & HG tripla erunt quadrati ipſius GH; & propterea quadratum ipſius FH duplum erit quadrati ipſius HG; eſtque h quadratum ipſius FM duplum quadrati ipſius FH (eo quod angulus FHM rectus eſt, & FH & HM ſunt radii æquales eiuſdem circuli BF): Igitur quadratum ipſius FM quadruplum erit quadrati ipſius HG; & propterea i recta FM dupla erit ipſius HG. Vnde FM æqualis erit HO. Eadem

a pr. 28. lib. 1. & pr. 10. lib. 4.
b ex pr. 17. l. 4.
c pr. 3. lib. 1.
d pr. 34 lib. 6.
e pr. 10. lib. 1.
f cor. pr. 16. l. 1.
g prop. 18. l. 5.
h pr. 18 lib. 5.
i ex pr. 17. l. 4.

dem ratione ſingulæ rectæ FN, N B &c. æquales erunt eidem HO, ſuntque l ſingulæ BC, MR, FE & NS parallelæ, & æquales eidem H O, propterea quod coniungunt terminos radiorum parallelorum, & m inter ſe æqualium, cùm æqualiter diſtent à cẽtro circuli maximi ſphæræ. Igitur duodecim dictæ rectæ æquales ſunt inter ſe; & quia axis AD perpendicularis eſt ad rectas M N, BF, RS & CE, & ideo n ad plana circulorum BFM & CER, & rectæ BC, MR, FE, NS parallelæ ſunt axi AD; propterea eædem rectæ o perpendiculares erunt ad ipſas BM, MF, FN: &c. atque ad CR, RE, &c. in planis eorundem circulorum exiſtentes. Similiter p anguli NBM, BMF CRE, &c. recti erunt, cùm in ſemicirculis conſtituti ſint. Quapropter q figuræ ſex B R, RF, FS, SB, BF & CE erunt quadrata, quæ comprehendunt figuram intra ſphæram deſcriptam. quod fuit propoſitum. Vocetur talis figura *Cubus*.

l pr. 27. lib. 1.
m pr. 10 lib. 2.
n pr. 2. lib. 6.
o prop. 4. l. 6.
p pr. 20 lib. 2.
q pr. 34 lib. 1.

*Corollarium* Patet ſphæræ diametrum poteſtate triplam eſſe lateris cubi. Nam ſphæræ radius AG factus eſt triplus poteſtate ipſius HG, eſtque AD dupla ipſius AG, atque latus cubi BC oſtenſum eſt duplum ipſius HG. Ergo r quadratum AD tri-

r ex pr. 19. l. 5. & pr. 12. l. 1.

triplum eſt quadrati lateris cubi BC.

PROPOSITIO IV. *In data ſphæra ſolidam figuram ſub viginti triangulis æquilateris, & inter ſe æqualibus contentam inſcribere. Vocetur autem tale ſolidum* Icoſaedrum. Tabula VIII. Figura 4. EVCL. 16. lib. XIII.

In ſphæra, cuius axis AB, centrum C, circulus maximus ADBF inſcribi debet figura ſolida imperata. Secetur *a* CI, quæ media pro- *a pr. 13*
portionalis ſit inter radium ſphæræ *l. 1. &*
AC, eiuſque partem quintam: erit *pr. 10.*
*b* eius quadratum quinta pars qua- *lib. 4.*
drati radij ſphæræ AC, & *c* ſecetur *b ex pr 17. lib. 4*
MC æqualis ipſi CI, & per I, & *c pr. 3.*
M ducantur duo plana, erecta *lib. 1.*
ad axim AB, atque ad circulum A DB (vt in prima propoſitione huius factum eſt) quæ *d* efficient duos cir- *d pr. 14.*
culos DG & EF *e* inter ſe æquales, *lib. 6.*
& *f* parallelos; eo quod iuncti radij *e ex pr.*
DI & EM æqualiter diſtant à cen- *10. l. 2.*
tro circuli ADB; Et *g* in eiſdem *f pr. 9. lib. 6.*
circulis inſcribantur duo pentagona *g pr. 1.*
regularia DHKL & FPON, ita vt *lib. 5.*
anguli D& F in pũcta diametraliter oppoſita ſphæræ D & F incidant;& à polis ſphærę A& B ad ſingulos angulos pentagonorũ rectæ iungantur AD, AH, &c. BF, BP, &c. Ducanturque rectæ ND, DO, &c. Oſtendendum eſt viginti triangula, compre-

prehendentia inſcriptam figuram, æqualia, & æquilatera eſſe. Diuidatur *h* arcus ON bifariam in E; iunganturque rectæ NE, DE & DC. Quoniam quadratum radij AC ſiue DC quintuplum eſt quadrati ipſius IC: Suntq; *i* duo quadrata DI & IC æqualia quadrato radij DC (propterea quod angulus DIC rectus eſt, cùm *l* axis AB perpendicularis ſit ad circulum DG.) Igitur duo quadrata DI & IC quintupla ſunt quadrati ipſius IC; & propterea quadratum ipſius DI quadruplum erit quadrati ipſius IC. Vnde *m* recta linea DI dupla erit ipſius IC; eſt autem MI dupla eiuſdem IC. Igitur rectæ DI & MI æquales ſunt inter ſe; eſtque *n* ME æqualis eidem DI (cùm æqualiter diſtent à centro) Ergo *o* figura DIME cuius angulus I rectus quadratum eſt, & propterea recta DE æqualis erit DI radio circuli DHG, ſiue radio ME; cumque arcus NE ſemiſſis ſit arcus NO ſubtenſi à latere pentagoni: *p* erit recta NE latus decagoni eiuſdem circuli EOF, cuius *q* DE latus eſt inſcripti hexagoni, cùm ſit æqualis radio circuli ME: Eſt verò axis AB perpendicularis ad circulum EOF, atque DE eſt parallela ipſi AB; Ergo *r* DE perpendicularis quoque erit ad planum circuli EOF; & propterea *ſ* ad rectam

*h ex pr. 19. l. 2.*
*i pr. 18. lib. 5.*
*l pr. 2. lib. 6.*
*m ex pr. 19. l. 5.*
*n pr. 10. lib. 2.*
*o pr. 34. lib. 1.*
*p pr. 3. lib. 5.*
*q ex pr. 8. l. 5.*
*r pr. 4. lib. 6.*
*ſ pr. 2. lib. 6.*

am EN in eo exiſtentem: Vnde
 triangulo DNE erit angulus DE t pr. 18.
I rectus, & propterea t quadratum l. 5.
pſius DN æquale erit quadrato
teris decagoni NE vnà cum
uadrato lateris hexagoni DE eiuſ- u prop.
em circuli NOF: & ideo u ND æ- 32. l. 5.
ualis erit lateri pentagoni NO e-
uſdem circuli EOF. Eadem ratio-
e ſingulæ rectæ DO, HO, &c. æ-
uales erunt ſingulis lateribus pen-
goni NO, OP, PF, &c. ideoque
quinque triangula NDO, OHP, x pr. 8.
KF, &c. quorum baſes ſunt quin- & 7. l. 1.
ue latera pentagoni NOPF inter
 æqualia, & æquilatera erunt.
adem ratione oſtendentur quinque
iangula DOH, HPK, KFL, &c.
uorum baſes ſunt quinque latera
entagoni DHKL æquilatera, &
ter ſe, & prioribus æqualia. Tan-
em quoniam AC quintuplū poteſt
pſius IC, & eſt MI dupla ipſius I
; Ergo y MA in I ſecatur extre- y prop.
na, & media ratione, cuius ſegmen- 26. l. 5.
um maius erit MI; hoc autem æ-
uale eſt circuli radio ID, ſcilicet
 lateri hexagoni circuli DG, erit z ex pr.
 minus ſegmentum AI æquale late- 8. l. 5.
i decagoni eiuſdem circuli: ideo- a ex pr.
que b quadratum ex DA, quod æ- 8. l. 5.
quale eſt duobus quadratis ex DI & b pr. 18
IA (cùm axis AB perpendicularis l. 5.
ſit oſtenſus ad eius radium ID) erit c pr. 32
c æquale quadrato lateris pentagoni; lib. 5.

&

d ex pr. 17. l. 4. & *d* propterea recta DA æqualis erit lateri pentagoni DH circulo DG inſcripti, & ſic reliquæ omnes AH, AK, AL, &c. pariterque BN, BO, BP, &c. erunt inter ſe æquales, & æquales ipſis lateribus DH, HK, KL, &c. Igitur decem *e* triangula e pr. 7. l. 1. vertices in A & B habentia (tot nimirum, quot ſunt latera amborum pentagonorum NOPF & DH, KL) æquilatera ſunt, & inter ſe, & prioribus æqualia. Quapropter viginti triangula comprehendentia ſolidam figuram intra ſphæram deſcriptam, æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia, vt propoſitum fuerat. Vocetur huiuſmodi figura ſolida *Icoſaedrum*.

*Corollarium* Sphæræ diameter ad latus icoſaedri eſt, vt latus hexagoni cum duplo lateris decagoni ad f ex pr. 8. lib. 5. latus pentagoni. Nam in circulo DG eſt DH latus pentagoni, & *f* radius DI, ſeu ei æqualis IM eſt latus hexagoni; eſtque IM maius ſegmentum rectæ MA diuiſæ extrema, g ibid. & media ratione: Ergo *g* minus eius ſegmentum AI, & ei æqualis MB ſunt latera decagoni eiuſdem circuli DG; & propterea diameter ſphæræ AB ad latus icoſaedri DH erit, vt ſumma lateris hexagoni IM, & dupli lateris decagoni AI ad latus pentagoni DH ab eodem circulo comprehenſorum.

PRO-

PROPOSITIO V. *In data ſphæra figuram ſolidam ſub duodecim pentagonis regularibus inter ſe æqualibus contentam, inſcribere. Vocetur autem talis figura* Dodecaedrum. Tab. VIII. Fig. 5. EVCL. 17. XIII.

Sit ſphæra, cuius circulus maximus ABCD, centrum E. Deſcribi debet intra eam imperata figura. Ducantur *a* tres diametri AC, BD, FH, quæ ſint ad inuicem perpendiculares; *b* & ſecetur EG æqualis radio cubi, ſeu medietati lateris cubi inſcripti in eadem ſphæra: & *c* in plano ABC fiat quadratum EGIK, quod *d* erit tertia pars quadrati ex radio AE; & *e* ſecetur EG in M extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum ſit EM, ſeceturque *f* GN æqualis EM, iungaturque recta NI; & *g* à puncto M ducatur MR parallela ipſi GI, vel EB, ſecans *h* NI productam in R, & KI in X; atque à puncto R ducatur RV parallela ipſi KI, vel EA, ſecans EB in V, & *i* à punctis N, I ad planum BEA eleuentur perpendiculares SIQ, ONP (quæ *l* inter ſe parallelæ erunt, & *m* in eodem plano, in quo recta RN iacet) ſecenturque *n* NO, PN, ſingulæ æquales ipſi GN, vel EM; & SI, QI fiant ſingulæ æquales ipſi EG, coniunganturque rectæ RS, SO PQ, QR: RE, RO, RP, SE, OE, PE, IE.

*a pr. 10. lib. 1. et prop. 6. l. 6.*
*b pr. 3. lib. 1. et ex pr. 3. hu.*
*c pr. 34. lib. 1.*
*d ex pr. hu.*
*e pr. 25. 3. lib. 4.*
*f prop. 3. l. 1.*
*g cor pr. 16. l. 1.*
*h ex pr. 29. l. 1.*
*i pr. 6. lib. 6.*
*l pr. 5. lib. 6.*
*m ex pr 4. l. 6.*
*n pr. 3. lib. 1.*

Pa-

Patet figuram RSOPQ in vno plano parallellarum SQ, OP exiſtere. Et quoniam GN æqualis facta eſt EM maiori ſegmento rectæ EG, diuiſæ in M extrema, & media ratione: Igitur *o* EN pariterque NM in G in eadem media, & extrema ratione ſecantur, eritque MN æqualis EG. Cumque *p* propter parallelas GI, MR ſit RN ad IN, vt MN ad NG vel *q* vt NE ad EG; atque propter parallelas EA, KI, VR ſit VE ad KE, atque RM ad XM, vt RN ad IN; Igitur *r* tam NR in I, quàm MR in X, quàm *E*V in K ſecantur extrema, & media ratione; ſuntque *ſ* maiora ſegmenta XM, KE æqualia, cùm ſint latera oppoſita parallelogrammi KM, & *t*. EG, KE latera quadratri KG æqualia ſunt; Ergo *u* minora ſegmenta VK, RX æqualia ſunt ipſi GN. vel NP, vel EM, vel *x* VR ei oppoſitæ in parallelogrammo VM. Et quia *y* PN perpendicularis ad planum AEB eſt quoque perpendicularis ad NR exiſtentem in eodem plano; Ergo *z* in triangulo RNP quadratum ex RP æquale erit quadratis ex RN, & ex PN, ſeu *a* ex NG, vel ex RX ei æquali, & ſimiliter propter angulum rectum RMN quadratum ex RN æquale eſt quadratis ex RM, & ex MN, vel ex ei æquali MX; Ergo quadratum

*o pr.25. et ex pr 26. l.4.*
*p ex pr 1. lib.4.*
*q pr.26 lib.4.*
*r ibid.*
*ſ prop. 26. l.1.*
*t pr.34. lib.1.*
*u pr.26. lib.4. et ex pr. 26. l.3.*
*x pr.26 lib. 1.*
*y pr. 2. lib.6.*
*z pr.28. lib.5.*
*a ex pr. 17. l.4.*

ex

ex RP æquale eſt tribus quadratis ex MR, ex RX, & ex XM; & *b* ſunt duo quadrata ex tota MR & RX minori ſegmento, rectæ diuiſæ extrema, & media ratione, tripla quadrati ex maiori eius ſegmento MX: Igitur quadratum ex RP quadruplũ eſt quadrati ex MX, ſeu quadrati KG: eſt verò *c* quadratũ ex SQ quadruplũ quadrati KG, eo quod SQ dupla eſt ipſius SI, ſeu IG: Ergo quadrata ex RP, & ex SQ æqualia ſunt, ideoq; rectæ *d* RP, SQ æquales erũt Eadem ratione RO æqualis erit eidem SQ, & ideo ipſi RP: Quare in pentagono RSP tres rectæ OR, SQ, RP ſubtendentes angulos eius æquales ſunt inter ſe, & *e* intermedia SQ parallela baſi OP ſecat ſubtenſas RP, RO extrema & media ratione, veluti ſecat ipſam RN in I; & maiora earum ſegmenta æqualia ſunt baſi OP, eo quod *f* SQ dupla ipſius SI, vel MN ad OP duplam ipſius NO, vel NG eſt vt MN ad eius maius ſegmentum NG rectæ extrema, & media ratione diuiſæ, & ſunt RO, RP æquales ipſi SQ; & ex ea relinquunt vtrinque portiones æquales; quia IS, IQ æquales ſunt, *g* & eorum portiones inter I, & ſubtenſas RO, RP æquales ſunt, ſicuti æquales ſunt portiones ON, NP rectæ parallelæ ipſi SQ: Igitur *h* pentagonum RSOPQ regulare eſt. Poſtea

b pr. 24 lib. 5.

c ex pri 19. l. 5.

d ex pr. 17. l. 4.

e prop. 2. & 26 lib. 4.

f pr. 11. l. 3. pr. 26. l. 4. & pr. 3. lib. 3.

g ex pr. 12. l. 4. & ex pr. 16. lib. 3.

h ex pr. 7. l. 4.

ſtea quia in triangulo EVR angulus V rectus eſt, quadratum *i* ex ER æquale erit duobus quadratis ex EV, & ex VR, ſeu *k* ex KV, quæ oſtenſa fuit ei æqualis; ſed *l* duo quadrata ex EV, & ex eius minori ſegmento VK tripla ſunt quadrati maioris ſegmenti KE rectæ diuiſæ extrema, & media ratione; Ergo quadratum ex ER triplum eſt quadrati KG. Similiter quia in triangulo ENO angulus N rectus eſt, quadratum ex EO æquale erit duobus quadratis ex EN, & ex NO, ſeu ex ei æquali GN; ſuntque duo quadrata ex EN, & ex minori ſegmento NG ræctæ diuiſæ extrema, & media ratione tripla quadrati ex EG maiori ſegmento; Ergo quadratum ex EO triplum eſt quadrati KG: non ſecus oſtendetur quadratum ex EP triplum quadrati KG: fuit autem quadratum radij ſphæræ EA triplum eiuſdem quadrati KG: Igitur quadrata rectarum ER, EO, EP, & EA æqualia ſunt, & ideo *m* rectæ ER, EO, EP, æquales erunt radio ſphæræ EA; propterea anguli R, C, P in ſuperficie ſphæræ exiſtent. Deinde quia SQ perpendicularis eſt ad planum BEA, *n* erit quoque erecta ad ei contiguã EI exiſtentem in eodem plano; & *o* eſt EI poteſtate dupla ipſius EG, & eiuſdem GE tripla eſt poteſtate ſemidiameter

*i pr. 18. lib. 5. et ex pr. 17. l. 4.* *l prop. 24. l. 5.* *m ex pr 17. l. 4.* *n prop. 2. l. 6.* *o pr. 18 lib. 5.*

ter

ter ſphæræ EA: Ergo EI poteſtate ſubſeſquialtera eſt radij ſphæræ, & ideo *p* EI erit diſtantia lateris cubi à centro ſphæræ; & eſt SQ bifariam ſecta in I, & perpendicularis ad EI, atque eſt dupla ſemilateris cubi EG: Ergo *q* SQ eſt latus cubi inſcripti in ſphæra ABCH, & ideo anguli S, Q pentagoni RSP in ſphæræ ſuperficie exiſtent. Si ergo compleatur inſcriptio cubi in ſphæra, cuius vnum latus eſt SQ; & ab eodem puncto N radij EA ſuper communi baſi OP cõſtruatur aliud pentagonum regulare, & *r* priori æquale, verticem habens verſus D, habebit omnes angulos in ſuperficie ſphæræ, & recta linea ſubtendens angulum pentagoni parallela baſi OP, pari modo applicata erit ſuper latere inſcripti cubi parallelo ipſi SQ.

*p ex pr. 3. hu.*

*q ex pr. 3. hu.*

*r ex pr. 17. l. 4.*

Et ſimiliter in extremitatibus B, C, D, F, & H reliquorum quinque radiorum conſtrui poſſunt bina pentagona, regularia & æqualia habentia angulos in ſuperficie ſphæræ, quorum rectæ ſubtendentes angulos pentagonorum æquidiſtantes baſibus applicatæ erunt reliquis decem lateribus inſcripti cubi; & propterea omnia dicta duodecim pentagona ſe ſe mutuò tangent, tum in eorum lateribus æquidiſtantibus lateribus cubi, quorum vnum eſt OP,

tum in angulis inſcripti cubi, & ideo compoponent ſolidam figuram. Vnde ſ inſcripta erit in ſphæra figura ſolida comprehenſa à duodecim pentagonis regularibus, & æqualibus. Quod erat faciendum. Vocetur talis figura *Dodecaedrum*.

ſ *Def. 2 huius.*

*Corollarium* Sphæræ diameter ad latus dodecaedri eſt vt latus trianguli æquilateri ad latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

t *ex pr. 3. hu*
u *pr. 30 l. 5.*
x *prop. 18. l. 4.*

Nam t quadratum diametri ſphæræ AC triplum eſt quadrati SQ lateris cubi, ſicuti, u quadratum lateris trianguli triplum eſt quadrati lateris hexagoni: Ergo x vt AC ad SQ, ita eſt latus trianguli regularis ad latus hexagoni; & vt SQ ad OP ſcilicet vt maius ad ſegmentum minus rectæ extrema, & media ratione diuiſæ (vt in hac propoſitione oſtenſum eſt), y ita eſt latus hexagoni ad latus decagoni: ergo z ex compoſitione ordinata diameter ſphæræ AC ad OP latus dodecaedri erit, vt latus trianguli regularis ad latus decagoni.

y *ex pr. 8. lib. 5.*
z *pr. 19. lib. 3.*

## SCHOLIVM.

Quod verò præter has quinque regulares ſolidas figuras, effici non poſſit alia, quæ à planis figuris æqualibus æquilateris, & æquiangullis con-

contineatur, ſic oſtendetur.

Ad coſtitutionem anguli ſolidi requiruntur duæ conditiones, *a* prima, vt anguli plani, conſtituentes ſolidum angulum, non ſint pauciores, quàm tres: ſecunda, *b* vt omnes, ſimul ſumpti, minores ſint quatuor rectis. Modò quia *c* angulus trianguli æquilateri tertia pars eſt duorum rectorum, ideſt ſexta pars quatuor rectorum: erunt ſex anguli triãguli æquilateri ſex partes ſextæ quatuor angulorum rectorum; ideoque æquales erunt quatuor rectis: Et propterea *d* plura, quàm quinque triangula æquilatera ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia non conſtituent angulum ſolidum, ſed figuræ planæ regulares, quæ ſpatium ſolidum comprehendere debent, neceſſe eſt, vt angulos ſolidoſ conſtituant. Igitur preter pyramidem, Octaedrum, & Icoſaedrum aliam figuram ſolidam triangula ipſa æquilatera conſtituere non poſſunt.

Secundò quia *e* angulus quadrati quarta pars eſt quatuor rectorum, erunt quatuor anguli quadrati æquales quatuor rectis; ideoque *f* plura, quàm tria quadrata ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia angulum ſolidum non efficient. Et propterea præter cubum nullam aliam figuram ſolidam quadrata

a *def.* 3 *lib.* 6.
b *pr.* 13. *lib.* 6.
c *ex pr.* 18. *l.* 1.
d *pr.* 13. *lib.* 6.
e *pr.* 34. *lib.* 1.
f *pr.* 13. *lib.* 6.

ipſa conſtituere poſſunt.

g ex pr. 18. l. 1. Tertiò quia *g* angulus pentagoni quinta pars eſt ſex angulorum rectorum, ideſt tres partes decimæ quatuor rectorum: erunt quatuor anguli pentagoni, ſimul ſumpti, æquales duodecim partibus decimis quatuor rectorum, ſcilicet erunt maiores, quàm quatuor recti: Et ideo

h pr. 13 lib. 6. *h* plura, quàm tria pentagona ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia non conſtituent angulum ſolidum. Igitur præter dodecaedrum aliam figuram ſolidam pentagona non conſtituent.

i ex pr. 18. l. 1. Quartò quia *i* angulus hexagoni ſexta pars eſt octo angulorum rectorum, ideſt tertia pars quatuor rectorum: erunt tres anguli hexagoni ſimul ſumpti æquales quatuor angu-

l pr. 13. lib. 6. lis rectis, & propterea *l* tres anguli exagonales ad vnum punctum conuenientes non conſtituent angulum ſolidum; ideoque hexagona, & ſic reliquæ omnes figuræ planæ regulares, excedentes numerum ſenarium angulorum, ineptæ erunt ad anguli ſolidi conſtitutionem, cùm pauciores, quàm tres anguli plani ſolidum angulum non efficiant; & propterea quælibet figuræ planæ regulares plurium, quàm quinque angulorum corpus aliquod regulare componere nequeunt. Quapropter præter Pyramidem, Octaedrum,

cu-

Cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum nulla alia figura conſtrui poteſt ex coaptatione planarum figurarum æqualium, & regularium. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO VI. *Circa datam ſphæram quodlibet regulare corpus circumſcribere, & in quolibet ipſorum ſphæram inſcribere.* Tabula VIII. Figura 6.

In ſphæra, cuius centrum H, & axis AC circunſcribi debet quodlibet ex dictis corporibus regularibus. *a* Inſcribatur in ſphæra corpus illius ſpeciei, quod circunſcribi debet; ſitque illud ABFG, & perpendicularis à centro ſphæræ ad planum figuræ BFG, ſiue radius inſcripti ſolidi ſit HE, & per punctum C extremum diametri AC *b* ducatur planum KMN parallelum plano BFG: eritque *c* radius HC perpendicularis quoque ad planum KMN, & ideo *d* omnes rectæ tangent circulos maximos per diametrum AC extenſos; & propterea planum KMN tanget ſphæram. Rurſus in pyramide HBFG producta *e* erit figura diſſecta KMN ſimilis baſi BFG, & omnia latera HN, HM, HK æqualia erunt, cùm eandem rationem habeant ad pyramidis æqualia latera BH, FH, GH eo quod ſunt radij ſphæræ. Eadem ratione ſi ducantur

*a pr. 1. 2. 3. 4. et 5. huius*

*b ex pr. 10. l. 6.*

*c ex pr. 9. l. 5.*

*d pr. 2. l. 6. et ex pr. 21. l. 2.*

*e prop. 16. l. 6.*

plana contingentia ſphæram parallela baſibus reliquarum pyramidum verticem in centro ſphæræ H habentium, in quæ ſolida figura ABFG reſoluitur, erunt figuræ planæ circunſcriptæ ſimiles figuris inſcriptis, & rectæ omnes à centro ſphæræ H per angulos inſcriptæ figuræ vſque ad externum planũ ductæ erunt æquales inter ſe, & prioribus HK, HM, HN, eo quod *f* eandem rationem habent ad latera æqualia pyramidum in centro ſphæræ verticem habentium, ſeu ad radios ſphæræ, quam habent radij ſphæræ, ſeu figuræ circunſcriptæ ad *g* æquales radios figuræ inſcriptæ. Quare plana omnia ſphæram tangentia in eiſdem punctis K, M, N, R, conuenient; & ideo ſolidam figuram efficient ſimilem ipſi ABFG. Quod erat faciendum.

*f. pr. 7. et 4. l. 3*

*g ex ſpr. 1. 2. 3. 4. et 5. hu.*

Secundò in dato corpore regulari BAFG inſcribi debet ſphæra. Radio HE deſcribatur ſphæra EO. Dico hanc eſſe inſcriptam ſolido; quia radij omnes cuiuſlibet ſolidæ figuræ regularis ſunt æquales inter ſe, vt ex quinque præcedentibus propoſitionibus deducitur. Ergo ſphæra radio HE deſcripta neceſſariò *h* tangit reliqua plana figuræ ABFG; & ideo *i* ſphæra EO inſcripta erit corpori regulari ABFG. Vt fuit propoſitum.

*h ex pri ma ſpur. huius prop.*

*i def. 3. f.*

*Finis.*

# EVCLIDIS
# PROPOSITIONES

Iuxta methodum Theonis vulgatam, cum locis huius operis, in quibus eædem Eucl. propoſitiones exponuntur.

*Primus numerus indicat librum, ſecundus propoſitionem, Tertius paginam huius reſtitutionis.*

## LIBER I.

1 SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum conſtituere. lib. 1. propoſit. 1. pagina 8.

2 Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. 1. 2. 10.

3 Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere. 1. 3. 11.

4 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrunque vtrique, habeant verò & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſin baſi æqualem habebunt,

bunt, eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. 1. 4. 11.

5 *Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: & ſi vlterius productæ ſint æquales illæ rectæ lineæ, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe æquales erunt.* 1. 6. 15.

6 Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt. 1. 20. 33.

7 Super eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. deducitur 1. ex pr. 7. pag. 17.

8 Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrunque vtrique, æqualia, habuerint verò & baſim baſi æqualem: angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt. 1. 7. 17.

9 Datum angulum rectilineum bifariam ſecare. 1. 8. 18.

10 *Datam rectam lineam finitam bifariam ſecare.* 1. 9. 19.

Data

11 Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare. 1. 10. 19.

12 Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere. 1. 11. 20.

13 Cùm recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam, angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet. 1. 12. 21.

14 Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ, eos qui ſunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ. 1. 13. 22.

15 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecuerint, angulos qui ad verticem ſunt æquales inter ſe efficient. 1. Coroll. 5. 15.

16 Cuiuſcunque trianguli vno latere producto, externus angulus vtroque interno & oppoſito maior eſt. 1. Cor. 18. 32.

17 Cuiuſcunque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti. 1. corollar. prop. 18. 32.

18 Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 1. 19. 32.

19 Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 1. 20. 33.

Om-

20 Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta. 1. 21. 34.

21 Si ſuper trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint, hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt. 1. 22. 35.

22 Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores, omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta, reliquo ſunt maiora. 1. 23. 36.

23 Ad datam rectam lineam datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere. 1. 24. 37.

24 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſin baſi maiorem habebunt. 2. cor. 2. prop. 6. 63.

25 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, baſin verò baſi maiorem: & angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum

tum angulo maiorem habebunt.
2. cor. 2. prop. 6. 63.

26 Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrunq; vtriq; vnumq; latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrunque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.
1. 25. 38.

27 Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.
1. 16. 28.

28 Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.
1. 16. 28.

29 In parallelas rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos inter ſe æquales efficit, & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem, & internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales facit. 1. 15. 26.

30 Quæ eidem rectæ lineæ parallela,

lelæ, & inter ſe ſunt parallelæ 1. 17. 30.
31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. 1. cor. 16. 30.
32 Cuiuſcunque trianguli vno latere vlterius producto: externus angulus duobus internis & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales. 1. 18. 31.
33 Rectæ lineæ quæ æquales & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt, & ipſæ æquales & parallelæ ſunt. 1. 27. 41.
34 Parallelogrammorum ſpatiorũ æqualia ſunt inter ſe quæ ex aduerſo & latera & anguli: atque illa bifariam ſecat diameter. 1. 26. 39.
35 Parallelogramma ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. 1. 31. 46.
36 Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. 1. 31. 46.
37 Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 1. 32. 48.
38 Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 1. 32.

1. 32. 48.
39 Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis. 4. ex prop. 1. 147.
40 Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus & ad eaſdem partes conſtituta & in eiſdem ſunt parallelis. 4. ex 1. 147.
41 Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. 1. cor. 1. prop. 32. 49.
42 Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. 1. 33. 50.
43 In omni parallelogrãmo, complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia. 4. 19. 183.
44 Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo. 4. 20. 186.
45 Dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. 4. 20. 186.
46 A data recta linea quadratum deſcribere. 1. 34. 51.
47 In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur,

ęqua-

æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur quadratis. 5. 18. 232.

48 Si quadratum quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt. 5. ex 29. 252.

## LIBER II.

1 Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub inſecta & quolibet ſegmentorum comprehenduntur. 4. 1. 149.

2 Si recta linea ſecta ſit vtrunque, rectangula quæ ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato. 4. 1. 149.

3 Si recta linea ſecta ſit vtcunque, rectangulum ſub tota & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato. 4. 1. 150.

4 Si recta linea ſecta ſit vtcunque: quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt & illis quæ à ſegmentis deſcribuntur quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo. 5. cor. pro. 19. 235.

5 Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum vnà cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei quod à dimidia deſcribitur, quadrato. 5. coroll. 22. 140.

6 Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta & adiecta, ſimul cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, cum ex adiecta componitur, tanquam ab vna deſcripto. 5. coroll. 22. 240.

7 . Si recta linea ſecetur vtcunque: quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quòd bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato. 5. corollar. prop. 20. 237.

8 Si recta linea ſecetur vtcunque: re-

rectangulum quater comprehenſum ſub tota & vno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit quadrato, æquale eſt ei, quod à tota & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato. 5. coroll. 21. 238.

9 Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: quadrata quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, duplicia ſunt & eius quod à dimidia, & eius quod ab intermedia ſectionum fit, quadratorum. 5. 23. 240.

10 Si recta linea ſecetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata, duplicia ſunt & eius quod à dimidia, & eius quod à compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna deſcriptum ſit, quadratorum. 5. 23. 240.

11 Datam rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato. 4. 25 193.

12 In amblygonijs triangulis, quadratum quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehen-

hendentibus, pro quantitate rectanguli bis comprehenſi, & ab vno laterum quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perdendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum. 5. corollar. 28. 250.

13 In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente, minus eſt quadratis quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, pro quantitate rectanguli bis comprehenſi, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum. 5. cor. 29. 252.

14 Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere. 4. 21. 287.

## LIBER III.

1 Dati circuli centrum reperire. 2. 1. 54.

2 Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint, recta linea quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet. 2. 4. 58.

3 Si in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam

dam non per centrum extenſam, bifariam ſecet: & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit. 2. 2. 56.

4 Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent non per centrum extenſæ, ſeſe mutuò bifariam non ſecabunt. 2. 3. 57.

5 Si duo circuli ſeſe mutuò ſecent, non erit illorum idem centrum. 2. 5. 59.

6 Si duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, eorum non erit idem centrum. 2. 5. 59.

7 Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eòque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: maxima quidem erit ea in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum vero propinquior illi quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ. 2. 6. 59.

8 Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eòque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: in cauam peripheriam cadentium rectarum

li-

linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt. In conuexā verò peripheriam cadentium rectarum linearum, minima quidem eſt illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur: aliarum autem, ea quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ. 2. 6. 59.

9 Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum ipſius eſt circuli. 2. cor. 16. 62.

10 Circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis non ſecat. 2. 7. 63.

11 Si duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra, ad eorum centra adiuncta recta linea & producta, in contactū circulorū cadet. 2. 8. 64

12 Si duo circuli ſe ſe exterius contingant, linea recta quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum illum tranſibit. lib. 2. prop. 8. 64.

13 Circulus circulum non tangit

in

in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus ſiue extra tangat. lib. 2. prop. 9. 65.

14 In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe. 2. 10. 66.

15 In circulo maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior. 2. 11. 68.

16 Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet, & in locum inter *ipſam* rectam lineam & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet. Et ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt, reliquus autem minor. 2. 21. 82.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum. 2. 22. 83.

18 Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerint, ad ipſam contingentem perpendicularis erit. 2. 23. 84.

19 Si circulum tetigerit recta quæpiam linæa, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excicetur, in excitata erit centrum circuli. 2. 23. 84.

In

20 In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 2. 13. 69.

21 In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli ſunt inter ſe æquales 2. prop. 14. 71.

22 Quadrilaterorũ in circulis deſcriptorum anguli qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales. lib. 2. 15. 73.

23 Super eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia & inæqualia non conſtituentur ad eàſdem partes. 5. ex 15. 227.

24 Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia. 5. ex 15. 227.

25 Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. 2. 1. 54.

26 In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. lib. 2. 16. 75.

27 In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. 2. 17. 77.

28 In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem, maiori, minorem autem, minori. 2. 18. 78.

In

29 In æqualibus circulis, æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. 2. 28. 78.
30 Datam peripheriam bifariam ſecare. 2. ex. 29. 79.
31 In circulo angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto. 2. 30. 80.
32 Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: anguli quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt angulis. 2. 24. 85.
33 Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo. 2. 25. 87.
34 A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo. lib. 2. prop. 26, 88.
35 Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulum. 4. 22. 188.

Si

36 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato. 4. 22. 188.

37 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eòque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem quod ſub tota ſecante & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato: incidens ipſa circulum tanget. 4. 22. 188.

# LIBER IV.

1 In dato circulo, rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior. 2. 12. 69.

2 In dato circulo, triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum. 5. 3. 201.

3 Circa datum circulum triangulum deſcribere, dato triangulo æqui-

Q qui-

quiangulum. 5. 4. 204.
4 In dato triangulo, circulum inſcribere. 5. 6. 208.
5 Circa datum triangulum, circulum deſcribere, 2. ex. 1. 54.
6 In dato circulo, quadratum deſcribere. 5. 3. 201.
7 Circa datum circulum, quadratum deſcribere. 5. 4. 204.
8 In dato quadrato, circulum inſcribere. 5. 6. 208.
9 Circa datum quadratum, circulum deſcribere. 5. 5. 207.
10 Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat vtrunque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui. 5. cor. 1. 199.
11 In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere. 5. 3. 201.
12 Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. 5. 4. 204.
13 In dato pentagono æquilatero & æquiangulo, circulum inſcribere. 5. 6. 208.
14 Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere. 5. 5. 207.
15 In dato circulo hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inſcribere. 5. 3. 201.
16 In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum & æquiangulum deſcribere. 5. 3. 201.

LIB.

# LIBER V.

1 Si ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices, quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. 3. ex. 15. 125.

2 Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, atque ſexta quartæ: erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æquè multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ. ex 3. 22. 135.

3 Si ſit prima ſecundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ, ſumantur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: erit & exæquo ſumptarum vtraque vtriuſque æquè multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ. 3. ex. 17. 127.

4 Si prima ad ſecundam, eandem habuerint rationem, & tertia ad quartam: etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint. 3. cor. 19. 132.

5 Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 3. ex. 15. 125.

6 Si duæ magnitudines, duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices. ex. 3. 22. 135. & 15. 125.

7 Æquales ad eandem, eandem habent rationem: & eadem ad æquales. 3. 3. 108.

8 Inæqualium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. 3. 2. 106.

9 Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: & ad quas eadem, eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales. 3. 4. 110.

10 Ad eandem magnitudinem, rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt. ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt. 3. 5. 111.

11 Quæ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. 8. 7. 113.

Si

12 Si ſint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum ſe habuerint vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. 3. 15. 125.

13 Si prima ad ſecundam, eandem habuerint rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam, maiorem rationem habuerint, quam quinta ad ſextam: prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam. lib 3. prop. 6. pag. 111.

14 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quarta, prima verò quàm tertia maior fuerit: erit & ſecunda maior quam quarta. Quòd ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: ſi verò minor, & minor erit. lib. 3. cor. 16. 127.

15 Partes, cùm pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent; ita ſumantur. 3 11. 118.

16 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. lib. 3. prop. 12. 119.

17 Si cõpoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque di-

diuiſæ proportionales erunt lib. 3. 13. 121.
18 Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt. lib. 3. prop. 14. 123.
19 Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerint ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum ſe habebit. 3. 15. 125.
20 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quòd ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit. ex 3. 19. 130.
21 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio, ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit, erit & quarta quam ſexta maior. quòd ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit. ex. 3. 20. 133.
22 Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione
ſu-

ſumantur, & ex æqualitate in eadem ratione erunt 3. 19. 130.

23 Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. lib. 3. prop. 20. 133.

24 Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem; quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: etiam compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta ad quartam. 3. 22. 135.

25 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 3. 16. 126.

## LIBER VI.

1 Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe vt baſes. 4. 1. 146.

2 Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint: quæ ad ſectiones

adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela. lib. 4. prop. 2. 150.

3 Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem quam reliqua ipſius trianguli latera. recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, ea bifariam ſecat trianguli ipſius angulum. 4. 3. 151.

4 Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. lib. 4. prop. 4. 152.

5 Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur. 4. 5. 154.

6 Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. 4. 6. 155.

Si duo

7 Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò ſimul vtrunque aut minorem aut non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circumquos proportionalia ſunt latera. 4. 8. 157.

8 Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 4. 9. 158.

9 A data recta linea imperatam partem auferre. 1. 28. 43.

10 Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit. 4. 12. 162.

11 Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire. 4. 10. 160.

12 Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem adinuenire. 4. 11. 161.

13 Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire. 4. 10. 160.

14 Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogram-

morum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 4. 14. 164.

15 Æqualium, & vnum angulum vni æqualem habentium triangulorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; & quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 4. 14. 164

16 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur rectangulo, illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. lib. 4. cor. 1. prop. 14. 165.

17 Si tres rectæ lineæ ſint proportionales, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum æquale eſt ei, quod à media deſcribitur quadrato: & ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei quod à media deſcribitur quadrato, illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 4. cor. 2. 14. 166.

A data

18 A data recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere. lib. 4. prop. 16. 167.

19 Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum. 4. 15. 166.

20 Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus. 4. 17. 180.

21 Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. 4. cor. 16. 180.

22 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint, ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt. 4. 18. 182.

23 Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent eam, que ex lateribus componitur. 4. 13. 162.

24 In omni parallelogrammo, quę circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti & inter ſe ſunt ſimilia. 4. 19. 183.

25 Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere. 4. 21. 187.

26 Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit & ſimile toti & ſimiliter poſitum communem cum eo habens angulum, hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit. 4. 19. 183.

27 Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur, maximum id eſt quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum, ſimile exiſtens defectui. ex 4. 24. 193.

28 Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri rectilineo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles ſint defectus, & eius quod à dimidia deſcribitur, & eius cui ſimile eſſe debet. 4. 24. 192.

29 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit paralelogrammo alteri dato. 4. 24. 192.

30 Propoſitam rectam lineam terminatam, extrema ac media ratio-

tione ſecare. 4. 25. 193.

31 In rectangulis, triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. 5. 18. 232.

32 Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela, tunc reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur. 4. 7. 155.

33 In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum ipſis peripherijs in quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti illis inſiſtant peripherijs. Inſuper verò & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 5. 11. 218.

## LIBER XI.

1 Quædam rectæ lineæ pars in ſubiecto quidem non eſt plano, quædam verò in ſublimi. lib. 6. axioma 4. 259.

2 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent, in vno ſunt plano: atque triangulum omne in vno eſt plano. 6. ax. 5. 260.

3 Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio eſt recta linea. 6. 1. 260.

4 Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuò ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. lib. 6. prop. 2. 261.

5 Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuò tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illæ tres rectæ in vno ſunt plano. 6. 3. 263.

6 Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. lib. 6. prop. 5. 266.

7 Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta, illa linea quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. 6. cor. 4. 265.

8 Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 6. 4. 264.

9 Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano, hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. 6. 7. 268.

10 Si duæ rectæ lineæ ſe mutò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tan-

tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano, illæ angulos æquales comprehendent. lib. 6. 10. 272.

11 A dato ſublimi puncto, in ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. 6. 6. 267.

12 Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare. 6. 6. 267.

13 Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes. 6. c. 5. 266.

14 Ad quæ plana, eadem recta linea recta eſt, illa ſunt parallela. 6. ex. 9. 270.

15 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano parallela ſunt quæ per illas ducuntur plana. 6. 10. 272.

16 Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur, communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 6. cor. 9. 272.

17 Si duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, in eaſdem rationes ſecabuntur. 6. 11. 274.

18 Si recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, illa etiam omnia quæ per ipſam plana, ad rectos eidem plano angulos erunt. 6. 4. 264.

Si duo

19 Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. 6. 8. 269.

20 Si angulus ſolidus planis tribus angulis contineatur, ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſint maiores. 6. 12. 275.

21 Solidus omnis angulus minoribus continetur, quam rectis quatuor angulis planis. 6. 13. 276.

22 Si plani tres anguli æqualibus rectis contineantur lineis, quorum duo vt libet aſſumpti tertio ſint maiores, triangulum conſtitui poteſt ex lineis æquales illas rectas coniungentibus. 6. 14. 278.

23 Ex planis tribus angulis, quorum duo vt libet aſſumpti tertio ſint maiores, ſolidum angulum conſtituere. Decet autem illos tres angulos rectis quatuor eſſe minores. 6. 14. 278.

24 Si ſolidum parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana & æqualia ſunt & parallelogramma. 6. 17. 286.

25 Si ſolidum parallelis planis contentum plano ſecetur aduerſis planis parallelo, erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. 6. 30. 315.

26 Ad datam rectam lineam eiuſque punctum, angulum ſolidum con-

conſtituere ſolido angulo dato æqualem. 6. 14. 278.
27 A data recta, dato ſolido parallelis planis comprehenſo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelis planis contentum deſcribere. ex 6. 14. 278. & ex pro. 18. 288.
28 Si ſolidum parallelis planis cõprehenſum, ducto per aduerſorum planorum diagonios plano ſectum ſit, illud ſolidum ab hoc plano bifariam ſecabitur. lib. 6. prop. 28. 310.
29 Solida parallelis planis comprehenſa, quæ ſuper eandem baſim, & in eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in ijſdẽ collocantur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. 6. 28. 310.
30 Solida parallelis planis circumſcripta, quæ ſuper eandem baſin & in eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in ijſdem reperiuntur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. 6. 28. 310.
31 Solida parallelis planis circunſcripta, quæ in eadem ſunt altitudine, æqualia ſunt inter ſe. lib. 6. 20. 318.
32 Solida parallelis planis circunſcripta quæ eiuſdem ſunt altitudinis, eam habent inter ſe rationem, quam baſes. 6. cor. 31. 319.
33 Similia ſolida parallelis planis cir-

circumſcripta, habent inter ſe rationem homologorum laterum triplicatam. 6. 37. 331.

34 Æqualium ſolidorum parallelis planis contentorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et ſolida parallelis planis contenta, quorum baſes cum altitudinibus reciprocantur, illa ſunt æqualia. 6. 32. 319.

35 Si duo plani ſint anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineant æquales, vtrunque vtrique, in ſublimibus autem lineis qualibet ſumpta ſint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ ſint perpendiculares, ab earum verò punctis, quæ in planis ſignata fuerint, ad angulos primùm poſitos adiunctæ ſint rectæ lineæ, hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent. 6. 15. Lemma abdatum.

36 Si rectæ tres lineæ ſint proportionales, quod ex his tribus fit ſolidum parallelis planis contentum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelis planis comprehenſo, quod æquilaterum quidem ſit, ſed antedicto æquiangulum. 6. 33. 321.

37 Si rectæ quatuor lineæ ſint proportionales

portionales, illa quoque ſolida parallelis planis contenta, quæ ab ipſis lineis & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelis planis comprehenſa, quæ & ſimilia & ſimi liter deſcribuntur, ſint proportionalia, illæ quoque rectæ lineæ portionales erunt. ex 6. 37. pag. 331.

38 Si planum ad planum rectum ſit, & à quodam puncto eorum quæ in vno ſunt planorum perpendicularis ad alterum ducta ſit, illa quæ ducitur perpendicularis, in commmnem cadet planorum ſectionem. 6. cor. 5. 266.

39 Si in ſolido parallelis planis circunſcripto, aduerſorum planorum lateribus bifariam ſectis, educta ſint per ſectiones plana, communis illa planorum ſectio, & ſolidi parallelis plani circunſcripti diameter, ſe mutuò bifariam ſecant. 6. ex. 29. 313.

40 Si duo ſint æqualis altitudinis priſmata, quorum hoc quidem baſim habeat parellelogrammum, illud verò triangulum, ſit autem parallelogrammum trianguli duplum, illa priſmata erunt æqualia. 6. ex. 28. 310.

# LIBER XII.

1 Similia quæ ſunt in circulis polygona, rationem habent inter ſe quam deſcripta à diametris quadrata. 5. 10. 216.

2 Circuli eam inter ſe rationem habent, quàm deſcripta à diametris quadrata. 5. 12. 221.

3 Omnis pyramis trigonam habens baſim, in duas diuiditur pyramides non tantùm æquales & ſimiles inter ſe, ſed toti etiam pyramidi ſimiles, quarum trigonæ ſunt baſes, atque in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata dimidio pyramidis totius ſunt maiora. lemma omiſſum.

4 Si duæ eiuſdem altitudinis pyramides trigona habeant baſes, ſit autem illarum vtraque diuiſa & in duas pyramidas inter ſe æquales totique ſimiles, & in duo priſmata æqualia, ac eodem modo diuidatur vtraque pyramidum quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idqua perpetuò fiat: quemadmodum ſe habet vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia quæ in vna pyramide priſmata, ad omnia quæ in altera piramide priſmata, multitudine æqualia. lemma omiſſum.

5 Pyramides eiuſdem altitudinis,

qua-

quarum trigonæ ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent quam ipſæ baſes. 6. 25. 303.
6 Pyramides eiuſdem altitudinis, quarum polygonæ ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent quam ipſæ baſes. 6. 25. 303.
7 Omne priſma trigonam habens baſim, diuiditur in tres pyramidas inter ſe æquales, quarum trigonæ ſunt baſes. 6. 28. 310.
8 Similes pyramides, quæ trigonas habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione. lib. 6. pr. 37. 331.
9 Æqualium pyramidum & trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus. Et quarum pyramidum trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus, illæ ſunt æquales. 6. 32. 319.
10 Omnis conus tertia pars eſt Cylindri eandem cum ipſo cono baſim habentis, & altitudinem æqualem. 6. 29. 312.
11 Coni & cylindri eiuſdem altitudinis, eam inter ſe rationem habent quam baſes. 6. 27. 308.
12 Similes coni & cylindri, triplicatam habent inter ſe rationem diametrorum quæ ſunt in baſibus. lib 6. pr. 37. 331.
13 Si cylindrus plano ſectus ſit aduerſis planis parallelo, erit quemad-

admodum cylindrus, ad cylindrũ ita axis ad axem. 6. 30. 315.
14 Coni & cylindri qui in æqualibus ſunt baſibus, eam habent inter ſe rationem, quam altitudines. 6. 30. 315.
15 Æqualium conorum & cylindrorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et quorum conorum & cylindrorum baſes cum altitudinibus reciprocantur illi ſunt æquales. 6. 32. 319.
16 Duobus circulis circum idem centrum conſiſtentibus, in maiori circulo poligonum æqualium, pariumque laterum inſcribere, quod minorem circulum non cangat. lemma omiſſum.
17 Duabus ſphæris circum idem centrum conſiſtentibus, in maiore ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat. lemma omiſſum.
18 Sphæræ inter ſe rationem habent ſuarum diametrorum triplicatam. lib. 6. pr. 37. 331.

## LIBER XIII.

1 Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, maius ſegmentum quod totius lineæ dimidium aſſumpſerit, quintuplum poteſt eius quadrati, quod

à totius dimidia deſcribitur, lib. 5. prop. 27. 247.

2 Si recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplum poſſit, & dupla ſegmenti huius linea per extremam & mediam rationem ſecetur, maius ſegmentum reliqua pars eſt lineæ primùm poſitæ. lib. 5. prop. 27. 247.

3 Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, minus ſegmentum quod maioris ſegmenti dimidiũ aſſumpſerit, quintuplum poteſt eius, quod à maioris ſegmenti dimidio deſcribitur, quadrati. 5. 26. 245.

4 Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, quod à tota, quodque à minore ſegmento ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. lib. 5. prop. 24. 242

5 Si ad rectam lineam, quæ per extremam & mediam rationem ſecetur, adiuncta ſit altera ſegmento maiori æqualis, tota hæc linea recta per extremam & mediam rationem ſecta eſt; eſtque maius ſegmentum linea primùm poſita. 4. cor. 26. 196.

6 Si recta linea rationalis, per extremam & mediam rationem ſecta ſit, vtrumque ſegmentorum irrationalis eſt linea, quæ dicitur

Reſi-

Reſiduum, omiſſum.

7 Si pentagoni æquilateri tres ſint æquales anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſequuntur, illud pentagonum erit æquiangulum 7. ex. 5. 210.

8 Si pentagoni æquilateri & æquianguli duos qui deinceps ſequuntur angulos rectæ ſubtendant lineæ illæ per extremam & mediam rationem ſe mutuò ſecant, earumque maiora ſegmenta, ipſius pentagoni lateri ſunt æqualia. lib. 5. prop. 7. 210.

9 Si latus hexagoni & latus decagoni eidem circulo inſcriptorum compoſita ſint, tota recta linea per extremam & mediam rationem ſecta eſt. eiuſque ſegmentum maius, eſt hexagoni latus. lib. 5. prop. 8. 211.

10 Si circulo pentagonum æquilaterum inſcriptum ſit, pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & latus decagoni, eidem circulo inſcriptorum. 5. 31. 255.

11 Si in circulo Rationalem habente diametrum, inſcriptum ſit pentagonum æquilaterum, pentagoni latus irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. omiſſum.

12 Si in circulo inſcriptum ſitt riangulum æquilaterum, huius trianguli latus potentia triplum eſt eius

eius lineæ, quæ ex circuli centro ducitur. 5. 30. 253.

13 Pyramidem conſtituere, & data ſphæra complecti, atque docere illius ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris ipſius pyramidis. 7. 1. 335:

14 Octaedrum conſtituere, eaque ſphæra qua pyramidem complecti, atque probare illius ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris ipſius octaedri. 7. 2. 337.

15 Cubum conſtituere, eaque ſphæra qua & ſuperiores figuras complecti, atque docere illius ſphæræ diametrum potentia triplam eſſe lateris ipſius cubi. lib. 7. prop 3. 338.

16 Icoſaedrum conſtituere, eademque ſphæra qua & antedictas figuras complecti, atque probare icoſaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ vocatur Minor. lib 7. prop. 4. 341.

17 Dodecaedrum conſtituere, eademque ſphæra qua & antedictas figuras complecti, atque probare dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ vocatur Reſiduum. 7. 5. 345.

18 Quinque figurarum latera proponere, & inter ſe comparare. 7. ex. cor. 1. 2. 3. 4. 5. à 335. ad 345.

Reliqui duo libri 14. 15. Hypſiclis Aleſandrini de quinque corporibus omiſſi ſunt.